MegaBook
Chuyên Gia Sách Luyện Thi

$S_{hp} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

$V_{Ox} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

$\quad = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx$

$v(t) = S'(t)$

$a(t) = v'(t)$

$v = v_0 + at$

$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + S_0$ (nhau S lần đầu)

$v^2 - v_0^2 = 2aS$.

by maikie.

Giải tích 12

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

Chủ đề 1+2:

SỰ BIẾN THIÊN VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- $x_{CĐ}, x_{CT}$: điểm cực trị của hàm số
  - $x_{CĐ}$: ______ đại ______
  - x_{CT} : ______ tiểu ______

- $y_{CĐ}, y_{CT}$: cực trị của hàm số
  - $y_{CĐ}$: giá trị cực đại của hàm số
  - y_{CT} : ______ tiểu ______

- Điểm $M(x_{CĐ}, y_{CĐ})$; $N(x_{CT}, y_{CT})$: điểm cực trị của đồ thị hàm số

  Điểm $M(x_{CĐ}, y_{CĐ})$: điểm cực đại của đồ thị hàm số

  ______ $N(x_{CT}, y_{CT})$: ______ tiểu ______

Các định lý

① Nếu $\begin{cases} y = f(x) \text{ xđ tại } x_0 \\ y = f(x) \text{ đạt CT tại } x_0 \\ \exists f'(x_0) \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

MegaBook
Chuyên Gia Sách Luyện Thi

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

② Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực trị.

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_{CĐ} = x_0$

- ___ $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_{CT} = x_0$

③ $y = f(x)$ có đồ thị (C)

$M(x_0, y_0)$: 1 điểm cực trị của (C)

Nếu ∃ tiếp tuyến của (C) tại M thì pt TT là:

$y = y_0$

PTTT: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

④ $y = f(x)$ xđ / D

$f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0

⇔ x_0 : 1 điểm cực trị của hs

- $(+) \to (-)$: CĐ
- $(-) \to (+)$: CT

Min, Max

1/ $f(x) \leq m$ (1) , $x \in D$

- (1) có n_0 đúng $\forall x \in D$ ⇔ $\max\limits_{x \in D} f(x) \leq m$

- (1) có n_0 $x \in D$ ⇔ $\min\limits_{x \in D} f(x) \leq m$

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

2/ $f(x) \geq m$ (2), $x \in D$

- (2) có n_0 đúng $\forall x \in D$ ⇔ $\min\limits_{x \in D} f(x) \geq m$

- (2) có n_0 $x \in D$ ⇔ $\max\limits_{x \in D} f(x) \leq m$

Bất đẳng thức

- Cosi 3 số: $a + b + c \geq 3.\sqrt[3]{a+b+c}$

"=" ⇔ $a = b = c$

- Bunhia: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$

"=" ⇔ $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$

! Đặt ẩn phụ bài toán đối xứng - đtròn:

- C_1: $\left[\begin{array}{l} t = x + y \\ t = x.y \end{array}\right.$ ĐK t: $(x+y)^2 \geq 4xy$ (đối xứng)

- C_2: Pt dạng đtròn: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

→ quy về 1 biến $\begin{cases} x - a = R.\sin t \\ x - b = R.\cos t \end{cases}$; $t \in [0; 2\pi]$

- C_3: x, y, z đối xứng, đặt:

$$\left[\begin{array}{l} t = x+y+z \\ t = xyz \\ t = xy + yz + xz \\ t = x^2+y^2+z^2 \end{array}\right.$$

Đk ràng buộc:

+ $\forall x,y,z$: $xy + yz + zx \leq x^2+y^2+z^2$
+ $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$
+ $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$

! Lưu ý: $a.\sin x + b.\cos x = c$ có n_0

$\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq c^2$

Chủ đề 4

TIỆM CẬN

★ Tiệm cận đứng: $(x_0 \notin TXĐ)$

• $\lim\limits_{x\to x_0^+} y = \pm\infty$ • $\lim\limits_{x\to x_0^-} y = \pm\infty$

★ Tiệm cận ngang: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = y_0$

! Lưu ý:

• (C): $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có TCĐ, TCN $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

• $d(M_0,(\Delta)) = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

• $f(x) = ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$

+) $f(x) = 0$ có $2n_0$ pb x_1, x_2 mà $\boxed{x_1 < \alpha < x_2}$

$\Leftrightarrow \boxed{a.f(\alpha) < 0}$

+) $f(x) = 0$ có $2n_0$ pb x_1, x_2 mà $\boxed{\alpha \notin [x_1;x_2]}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}}$

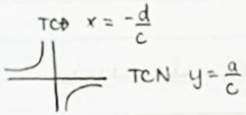
Cụ thể: • $\alpha < x_1 < x_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$ | • $x_1 < x_2 < \alpha$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha \end{cases}$ $\left(\frac{S}{2} = \frac{-b}{2a}\right)$

Chủ đề 5

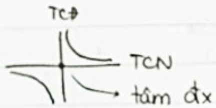
KHẢO SÁT HÀM

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ac \neq 0$; $ad - bc \neq 0$)

• $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0$



• $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0$



$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

a>0 a<0

• $y' = 0$ (vô n_0)

• $y' = 0$ (n_0 kép)

• $y' = 0$ (có $2n_0$ pb)

1/ Hs đb / R (nb): $\begin{cases} a > 0 \;/\; (a < 0) \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

(nếu a chứa tham số → xét thêm TH $a = 0$)

2/ Hs đb (nb) / D: $y' \geq 0 \ \forall x \in D$

($y' \leq 0 \ \forall x \in D$)

• C_1: $f(x) > g(m) \ \forall x \in D$: Cô lập m

• C_2: Xét 2 TH: $\Delta_{y'} \leq 0$

$\Delta_{y'} > 0$, tìm tập n_0 $y' = S$ (đk $D \subset S$)

(dấu "=": hữu hạn điểm)

3/ Hs có cực đại, cực tiểu (ctrị): $\Delta_{y'} > 0$

4/ Tâm đx - Điểm uốn: $(x_0; f(x_0))$: $y''(x_0) = 0$

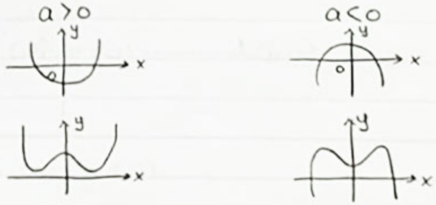
5/ Tiếp tuyến có hệ số góc $\left.\begin{matrix} \max\ (a<0) \\ \min\ (a>0) \end{matrix}\right\}$ tại tâm đx

$y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) $y' = 4ax^3 + 2bx$

a>0 a<0

• $y' = 0$ có $1n_0$

• $y' = 0$ có $3n_0$



MegaBook
Chuyên Gia Sách Luyện Thi

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

1/ Hs có 1 ctrị : $ab \geq 0$

- 1 CĐ, ko có CT : $a < 0$; $b \leq 0$
- 1 CT, ______ CĐ : $a > 0$; $b \geq 0$

______ 3 ctrị : $ab < 0$

2/ 3 ctrị lập thành . . . :

- $ab < 0$ → 3 ctrị A, B, C

A(. .), B(. .), C(. . .)

- Tính AB, AC, BC ; nxét AB = AC

→ đk

! ĐK tiếp xúc 2 đồ thị : $(C_1): y = f(x)$

$(C_2): y = g(x)$

(C_1) txúc (C_2) ⇔ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có n_0

Các phép biến đổi đồ thị

$(C_1): y = f(x) + a$

↑

$(C_3): y = f(x+a)$ ← $(C): y = f(x)$ → (C_4) $y = f(x-a)$

↓

$(C_2): y = f(x) - a$

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

- (C_5): $y = -f(x)$: Lấy đx (C) qua Ox

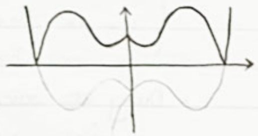
- (C_6): $y = f(-x)$: ______ Oy

- (C_7): $y = |f(x)|$
  - Giữ nguyên phần trên Ox ($y \geq 0$)
  - Lấy đx phần p' dưới qua Ox
  - Xoá bỏ phần dưới Ox

⇒ Số ctrị (C_7) = Số ctrị (C) + Số giao điểm (C) với Ox

- (C_8): $y = f(|x|)$
  - Giữ nguyên phần bên phải Oy ($x \geq 0$)
  - Xoá bỏ phần bên trái Oy
  - Lấy đx phần bên phải Oy sang trái

- (C_9): $y = |f(|x|)|$
  - Vẽ (C_8): $y = f(|x|)$
  - Vẽ $y = |f(|x|)|$
    - Giữ nguyên (C_8) p' trên Ox
    - Lấy đx (C_8) p' dưới Ox qua Ox
    - Xoá bỏ phần dưới qua Ox



Dạng: Điểm cố định - Đường cố định

- Bài toán 1: Cho $(C_m): y = f(x;m)$

Tìm điểm cố định (C_m) đi qua

↳ Giải: Cô lập m: $(C_m): y = f(x;m)\ \forall m$

$\Leftrightarrow g(x;y).m^2 + h(x;y).m + p(x;y) = 0\ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x;y) = 0 \\ h(x;y) = 0 \\ p(x;y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ → Đ' cố định $M(x_0;y_0)$

- Bài toán 2: Cho $(C_m): y = f(x;m)$

Tìm đồ thị (cho trước dạng hàm) mà (C_m) luôn txúc.

↳ Giải:

+ Gọi (C) cần tìm dạng:

$\left[\begin{array}{ll} y = ax+b & \text{nếu (C) là đt} \\ y = ax^2+bx+c & \text{\_\_\_\_ parabol} \\ y = ax^3+bx^2+cx+d & \text{\_\_\_\_ đồ thị hs bậc 3} \end{array}\right.$

+ Dùng đk txúc để tìm a, b, c, d:

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có n_0

Dạng: Tương giao 2 đồ thị

↳ Cách làm: xét pt hoành độ giao điểm

1/ a. $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

PT có 2 n_0 x_1, x_2 thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 . x_2 = c/a \end{cases}$

b. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ (a \neq 0)$

PT có 3 n_0 x_1, x_2, x_3 thì $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b/a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = c/a \\ x_1x_2x_3 = d/a \end{cases}$

c. $ax^4 + bx^2 + c = 0\ (a \neq 0)$ (*)

Đặt $x^2 = t\ (t \geq 0)$ → $at^2 + bt + c = 0$ có 2 n_0 dương $t_1, t_2\ (0 < t_1 < t_2)$

→ (*) có 4 n_0: $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$

2/ (C_1) tiếp xúc (C_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có n_0 $x = x_0$

→ Tiếp điểm $M(x_0; f(x_0))$

! Đặc biệt: (C): $y = f(x)$ nhận (d): $y = kx + b$ là tiếp tuyến

$\Leftrightarrow$ HPT: $\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có n_0

! Chú ý: Cho (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

(d): $y = mx + n$

+ (C) cắt (d) tại 3 đ' A, B, C pb mà AB = AC

→ (d) đi qua điểm uốn của (C)

+ Nếu trg 4 p/á A, B, C, D có 1 p/á ∄ m

→ ta ktra xem (d) có cắt (c) tại 3 đ' pb ko.

Dạng: PP hàm số

① $f(x) = g(x)$ có n_0 !

⇔ $\left[\begin{array}{l} f(x) \text{ đb}/D, \quad g(x) \text{ nb}/D \\ f(x) \text{ đb (nb)}/D, \quad g(x) = \text{hằng số} \end{array}\right.$

② Hàm đặc trưng

③ PT, BPT với tham số:

a/ Tìm m để pt: $f(x; m) = 0$

1. Có n_0 $x \in D$
2. — n n_0 với $n \in N^*$ trên D

↳ Giải: Cô lập m → $g(x) = m$

b/ $f(x; m) \leq 0$. Tìm đk của m để:

1. Có n_0 $x \in D$
2. Có n_0 đúng $\forall x \in D$

↳ Giải: Cô lập m

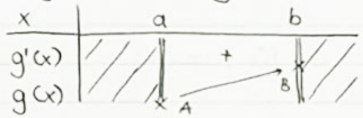
∘ $g(x) \leq m$

1. Có n_0 $x \in D$ ⇔ $\min\limits_{x \in D} g(x) \leq m$
2. Có n_0 đúng $\forall x \in D$ ⇔ $\max\limits_{x \in D} g(x) \leq m$

∘ $g(x) \geq m$

1. Có n_0 $x \in D$ ⇔ $\max\limits_{x \in D} g(x) \geq m$
2. Có n_0 đúng $\forall x \in D$ ⇔ $\min\limits_{x \in D} g(x) \geq m$

! Chú ý: Tình huống đbiệt:



	Có n_0 $x \in (a;b)$	n_0 đúng $\forall x \in (a;b)$
$g(x) \geq m$	$\max \geq m \Leftrightarrow B > m$	$\min \leq m \Leftrightarrow A \geq m$
$g(x) \leq m$	$\min \leq m \Leftrightarrow A < m$	$\max \leq m \Leftrightarrow B \leq m$
$g(x) > m$	$\max > m \Leftrightarrow B > m$	$\min < m \Leftrightarrow A \geq m$
$g(x) < m$	$\min \leq m \Leftrightarrow A < m$	$\max \leq m \Leftrightarrow B \leq m$

Chủ đề 7

HÀM SỐ MŨ
HÀM SỐ LOG

Lũy thừa a^n (Hàm số luỹ thừa: $y = x^\alpha$)

① Số mũ tự nhiên: $a \in R$; $n \in N$

② Số mũ nguyên: $a \in R^*$; $n \in N$

③ Số mũ hữu tỉ: $a \in R_+^* = (0;+\infty)$

$m \in Z$; $n \in Z$; $n \geq 2$

$\rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

④ Số mũ thực: $a \in R_+^* = (0,+\infty)$

$\Rightarrow a^\alpha = a^{\lim r_n}$

Tính chất luỹ thừa

1. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $a^m . a^n = a^{m+n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $(a^m)^n = a^{m.n}$
7. $(ab)^n = a^n . b^n$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
10. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m.n}}$

- Cụ thể: Với $a \geq 0$; $b \geq 0$; $m, n \in N^*$

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b>0)$
3. $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$ $(a>0)$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^m}$

- Với BĐT:

1. $a > 1$ $\rightarrow$ $a^m > a^n$ $(m>n)$
2. $0 < a < 1$ $\rightarrow$ $a^m < a^n$ $(m>n)$
3. $0 < a < b$ $\rightarrow$ $\left[\begin{array}{ll} a^n < b^n & (n>0) \\ a^n > b^n & (n<0) \end{array}\right.$

Logarit $\log_a b$ ĐK: $a, b > 0$; $a \neq 1$

Tính chất logarit

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^b = b$
4. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
5. $a^{\log_a b} = b$
6. $\log_a b^a = a . \log_a |b|$
7. $\log_{a^a} b = \frac{1}{a} \log_a b$
8. $\log_a (b.c.d) = \log_a b + \log_a c + \log_a d$

9. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

10. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$

11. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$

12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

- Với BĐT:

1. $a > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_a b > 0 & (b > 1) \\ \log_a b < 0 & (0 < b < 1) \end{array}\right.$
2. $0 < a < 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_a b > 0 & (0 < b < 1) \\ \log_a b < 0 & (b > 1) \end{array}\right.$
3. $a > 1 \Rightarrow \log_a b < \log_a c \quad (0 < b < c)$
4. $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b < \log_a c \quad (b > c > 0)$

	Hàm số mũ $y = a^x$	Hàm số log $y = \log_a b$
TXĐ	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}_+^* = (0; +\infty)$
TGT	$\mathbb{R}_+^* = (0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Giới hạn	$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \left[\begin{array}{ll} 0 & (0<a<1) \\ +\infty & (a>1) \end{array}\right.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \left[\begin{array}{ll} +\infty & (0<a<1) \\ 0 & (a>1) \end{array}\right.$	$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \left[\begin{array}{ll} -\infty & (0<a<1) \\ +\infty & (a>1) \end{array}\right.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \left[\begin{array}{ll} +\infty & (0<a<1) \\ -\infty & (a>1) \end{array}\right.$

* Dạng $(1+0)^{+\infty} = e$:

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

* Dạng $\frac{0}{0}$:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

! Chú ý: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Đạo hàm của hàm số mũ

1. $(e^x)' = e^x$
2. $(a^x)' = a^x . \ln a$
3. $(a^u)' = a^u . \ln a . u'$

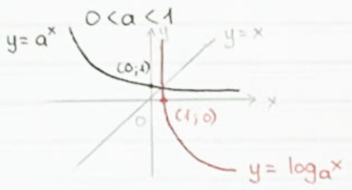
Đạo hàm của hàm số log

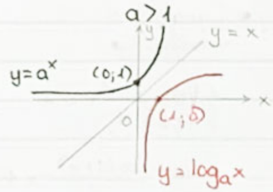
1. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$

2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

3. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Đồ thị hàm mũ - hàm log

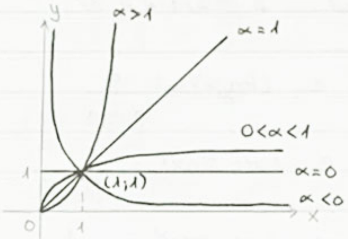




Hàm số mũ ($y = a^x$)	Hàm số log ($y = \log_a x$)
• Luôn cắt trục Oy tại (0;1)	• Luôn cắt Ox tại (1;0)
• Luôn nằm trên Ox	• Luôn nằm bên phải Oy
• TCN: Ox	• TCĐ: Oy

Đồ thị hàm số luỹ thừa

$y = x^\alpha$



• Luôn đi qua (1;1)
• $\alpha > 0$: ko có tiệm cận
• $\alpha < 0$: TCĐ: Oy; TCN: Ox

Bài toán lãi kép

CSC: $u_n = u_1 + (n-1)d$
CSN: $u_n = u_1 . q^{n-1}$

• Bài toán 1: Gửi A (VNĐ) với kì hạn ..., lãi suất r
→ Sau n kì hạn, ông A có: $\boxed{A_n = A.(1+r)^n}$

↳ Hệ quả: Bài toán tăng trưởng: Svật có A (con). Sau 1 chu kì tăng r lần. Sau n chu kì có:

$A_n = A(1+r)^n = A\left[(1+r)^{\frac{1}{r}}\right]^{n.r}$, $\lim\limits_{x \to +\infty}(1+r)^{\frac{1}{r}} = e$ → $= A.e^{n.r}$ (con)

• Bài toán 2: Vay A (VNĐ), lãi suất r/tháng. Mỗi tháng trả m (VNĐ). Sau n tháng, còn nợ bn?

$$\boxed{A_n = A(1+r)^n - m.\dfrac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}}$$

↳ Hết nợ: $A_n = 0$

CÔNG THỨC đạo hàm

1. $(C)' = 0$
2. $(x^n)' = n.x^{n-1}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
8. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\cot^2 x - 1$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(a^x)' = a^x.\ln a$
11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(|x|)' = \dfrac{x}{|x|}$

! $[f(u)]' = f'(u).u'$

Chủ đề 8

PT - BPT MŨ & LOG

PT mũ

① $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

② $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

③ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

BPT mũ

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

MegaBook
Chuyên Gia Sách Luyện Thi

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

PT logarit $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$

① $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

② $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

BPT logarit

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

*
* *

Dạng bài tập

① PT - BPT mũ & log cơ bản:

② Đặt ẩn phụ:

2.1/ $\alpha_n . a^{n.f(x)} + \dots + \alpha_2 . a^{2f(x)} + \alpha_1 . a^{f(x)} + \alpha_0 = 0$

$\rightarrow$ Đặt $t = a^{f(x)}$ $(t > 0)$

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

2.2/ PT đẳng cấp: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)}.b^{g(x)} + p.b^{2g(x)} = 0$

$\rightarrow$ Chia 2 vế cho $b^{2g(x)}$

2.3/ PT logarit:

$\rightarrow$ Đặt $t = \log_a f(x) \rightarrow \log_{f(x)} a = \frac{1}{t}$

③ Phương pháp hàm số:

3.1/ PT: $f(x) = g(x)$ có n_0! $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ đb};\ g(x) \text{ nb} \\ f(x) \text{ đb / nb};\ g(x) = \text{hằng số} \end{array}\right.$

3.2/ Hàm đặc trưng: $f(u(x)) = f(v(x))$

PT đặc trưng $f(t)$ xđ / $D = TGT_{u(x)} \cap TGT_{v(x)}$

Nếu $f(t)$ đb (nb) / $D \rightarrow u(x) = v(x)$

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

! Chu kì:
- sin, cos: $T = \frac{2\pi}{a}$
- tan, cot: $T = \frac{\pi}{a}$

Liên quan giữa các cung đặc biệt

① Đối nhau:
(cos đối)

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\cot(-x) = -\cot x$

② Bù nhau:
(sin bù)

$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\cot(\pi - x) = -\cot x$

③ Phụ nhau:
(phụ chéo)

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

④ Hơn kém π:
(khác pi tan)

$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\tan(\pi + x) = \tan x$
$\cot(\pi + x) = \cot x$

UNIVERSITY of GREENWICH
DATE

Công thức cơ bản

$\sin(x + k2\pi) = \sin x$ $\quad$ $\tan(x + k\pi) = \tan x$
$\cos(x + k2\pi) = \cos x$ $\quad$ $\cot(x + k\pi) = \cot x$

Công thức hay gặp

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\tan x . \cos x = 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Công thức cộng

- $\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$
- $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y}$
- $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x . \tan y}$

Công thức nhân đôi - nhân ba

- $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$; $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
- $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
  $\hookrightarrow \sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
  $\hookrightarrow \cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$

Công thức hạ bậc

- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
- $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$

Công thức tích → tổng

- $\sin x \cdot \cos y = 1/2 \cdot [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$
- $\cos x \cdot \cos y = 1/2 \cdot [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
- $\sin x \cdot \sin y = 1/2 \cdot [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

Công thức tổng → tích

- $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos x = 2 \cdot \cos\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = 2 \cdot \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{x-y}{2}$

Công thức khác

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Phương trình lượng giác cơ bản

- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$
- $\sin x = \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(|a| \leq 1)$
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$
- $\cos x = \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos \alpha + k2\pi \\ x = -\arccos \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(|a| \leq 1)$

- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$
- $\tan x = \alpha \Leftrightarrow x = \arctan \alpha + k\pi$
- $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$
- $\cot x = \alpha \Leftrightarrow x = \text{arc}\cot \alpha + k\pi$

Phương trình lượng giác thường gặp

① PT bậc 2 với 1 hàm số lượng giác:

PT: $a.f^2(x) + b.f(x) + c = 0 \quad (a \neq 0)$

- $f(x)$: sin, cos, tan, cot

↳ Đặt $t = f(x)$

② PT bậc 1 với sinx và cosx:

PT: $a.\sin x + b.\cos x = c \quad (a, b, c \in R;\ a^2 + b^2 \neq 0)$

- ĐK có n_0: $a^2 + b^2 \geq c^2$

↳ Đặt: $\cos \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Có: $a.\sin x + b.\cos x = \sqrt{a^2+b^2}.\sin(x+\alpha)$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

③ PT đẳng cấp bậc 2 với sinx, cosx:

PT: $a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = d$

- TH1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + kx \rightarrow a = d$
- TH2: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + kx$
  - → Chia 2 vế cho $\cos^2 x$
  - → Đặt $t = \tan x$

! Chú ý: PT đẳng cấp bậc 3:

- $a.\sin^3 x + b.\sin^2 x\cos x + c.\sin x.\cos^2 x + d.\cos^3 x = e\sin x + f.\cos x$
- $a.\sin 3x + b\sin^2 x.\cos x + c.\sin x.\cos^2 x + d.\cos 3x = 0$

④ PT đối xứng và nửa đối xứng với sinx và cosx:

PT: $a(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x.\cos x = c$

↳ Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$

Đk: $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = 1 \pm 2\sin x.\cos x$

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

• Tính nhanh:

đạo hàm

- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f}\right)' = \dfrac{ae.x^2 + 2af.x + (bf-ce)}{(ex+f)^2}$

- $[f(x).f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x).f''(x)$

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

Cực trị

hàm trùng phương

$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$

1. Có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$

2. Có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$

3. Có 3 cực trị tạo thành:
   - $\triangle$ vuông cân: $8a + b^3 = 0$
   - $\triangle$ đều: $24a + b^3 = 0$
   - $\triangle$ có diện tích S: $32a^3S^2 + b^5 = 0$
   - Cùng gốc toạ độ $O(0;0)$ thành 4 đỉnh h.thoi: $b^2 - 2ac = 0$

Đồ thị $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Cắt Ox tại 3 đ' pb $\Leftrightarrow x_{CĐ} . x_{CT} < 0$

Chủ đề 9

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

Công thức

1. $\int 0.dx = C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + C$
5. $\int \sin kx.dx = -\frac{\cos kx}{k} + C \quad (k \neq 0)$
6. $\int \cos kx.dx = \frac{\sin kx}{k} + C \quad (k \neq 0)$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 kx}.dx = \frac{1}{k}\tan kx + C \quad (k \neq 0)$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 kx}.dx = \frac{-1}{k}\cot kx + C \quad (k \neq 0)$
9. $\int e^{kx}.dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$
10. $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arcsin x + C$
12. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
13. $\int \tan(ax+b) \quad (a \neq 0)$
$= \frac{-1}{a}\ln|\cos(ax+b)|$
14. $\int \cot(ax+b)$
$= \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)|$
15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$
16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$
17. $\int \cos^2 x.dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
18. $\int \sin^2 x.dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ

$$I = \int \frac{f(x)}{g(x)}.dx$$

- TH1: Bậc Tử $\geq$ Bậc Mẫu $\rightarrow$ Chia Tử cho Mẫu
- TH2: Bậc Tử < Bậc Mẫu:

$$I_1 = \frac{f(x)}{(ax+b)^n.(cx^2+dx+e)^m} \quad \left(\begin{array}{l} ac \neq 0 \\ \Delta = d^2 - 4ce < 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ Tìm $n + 2m$ hằng số:

$$I_1 = \frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{a_n}{(ax+b)^n} + \frac{c_1x+d_1}{cx^2+dx+e} + \dots + \frac{c_mx+d_1}{(cx^2+dx+e)^m}$$

$$I = \int \frac{a_1}{ax+b}.dx + \dots + \int \frac{a_n}{(ax+b)^n}.dx + \int \frac{c_1x+d_1}{cx^2+dx+e}.dx + \dots + \int \frac{c_mx+d_1}{(cx^2+dx+e)^m}.dx$$

Một số dạng toán

Dạng 1.1: Đặt ẩn phụ: $I = \int \sin^m x . \cos^n x \quad (m, n \in Z)$

- TH1: m lẻ, n chẵn → $t = \cos x$ (Đặt theo cái chẵn)
- TH2: m chẵn, n lẻ → $t = \sin x$
- TH3: m lẻ, n lẻ → $t = \left[\begin{array}{l}\sin x \\ \cos x\end{array}\right.$
- TH4: m chẵn, n chẵn
  - $m, n \geq 0$ → Hạ bậc
  - $m < 0;\ n > 0$ → $t = \cot x$
  - $m > 0;\ n < 0$ → $t = \tan x$
  - $m, n < 0$ → $t = \left[\begin{array}{l}\tan x \\ \cot x\end{array}\right.$

! Một số tình huống đặt ẩn phụ hay gặp:

Dấu hiệu	Đặt ẩn
1. $f(x^2).x\,dx$	$\left[\begin{array}{l}t = x^2 \\ t = ax^2 + b\end{array}\right.$
2. $f(\sin x).\cos x.dx$	$\left[\begin{array}{l}t = \sin x \\ t = a\sin x + b\end{array}\right.$
3. $f(\cos x).\sin x.dx$	$\left[\begin{array}{l}t = \cos x \\ t = a\cos x + b\end{array}\right.$
4. $f(\ln x).\frac{dx}{x}$	$\left[\begin{array}{l}t = \ln x \\ t = a\ln x + b\end{array}\right.$
5. Hsố có 1 dấu căn	t = căn
6. ______ MS đơn giản	t = MS

Dạng 1.2: Nguyên hàm từng phần:

$\int u.dv = uv - \int v.du \iff \int uv'.dx = uv - \int u'v.dx$

↳ Cách đặt: $\int P(x).Q(x).dx$

1/ $P(x)$: đa thức

$Q(x)$: chứa $\sin(ax+b)$; $\cos(ax+b)$; e^{ax+b}; A^{ax+b}

$\Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ v' = Q(x) \end{cases}$

2/ $P(x)$: đa thức, phân thức, hằng số

$Q(x)$: $\ln(ax+b)$; $\log_A(ax+b)$

$\Rightarrow \begin{cases} u = Q(x) \\ v' = P(x) \end{cases}$

3/ $P(x)$: e^{ax+b} ; A^{ax+b}

$Q(x)$: $\sin(Bx+C)$; $\cos(Bx+C)$

→ Tích phân từng phần 2 lần

→ Chuyển vế → KQ.

⊛ Ng. hàm: $I = \int \frac{f(x)}{g(x)}.dx$

- TH1: Bậc Tử ≥ Bậc Mẫu → chia Tử cho Mẫu
- TH2: Bậc Tử < Bậc Mẫu

$$I = \frac{f(x)}{(ax+b)^n.(cx^2+dx+e)^m} \quad (ac \neq 0;\ \Delta = d^2 - 4ce < 0)$$

↳ Tìm $(n+2m)$ hằng số:

$$I = \frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{a_n}{(ax+b)^n}$$

$$+ \frac{c_1x+b_1}{cx^2+dx+e} + \frac{c_2x+b_2}{(cx^2+dx+e)^2} + \dots + \frac{c_mx+b_m}{(cx^2+dx+e)^m}$$

-- Bài toán cần nhớ --

① $I = \int e^{ax+b} . \left| \begin{array}{l} \sin(cx+d).dx \\ \cos(x.c+d).dx \end{array} \right.$

↳ Đặt $\begin{cases} u = e^{ax+b} \\ v' = \left| \begin{array}{l} \sin(cx+d).dx \\ \cos(cx+d).dx \end{array} \right. \end{cases}$

(hoặc ⇄ lại)

UNIVERSITY of GREENWICH
DATE

② $I = \int f(x).\ln^{\alpha}(g(x)).dx \quad (\alpha \in \mathbb{N}^*;\ f(x), g(x)$: h. đa thức)

↳ Đặt $\begin{cases} u = \ln^{\alpha}(g(x)) \rightarrow u' = \alpha.\ln^{\alpha-1}(g(x)).\frac{g'(x)}{g(x)} \\ v' = f(x) \rightarrow v = \int f(x).dx \end{cases}$

③ $\int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_2-x_1}.\ln\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right| + C$

④ $\int \frac{dx}{\sin a.\sin b} = \int \frac{1}{\sin(a-b)}.\left(\frac{\cos b}{\sin b} - \frac{\cos a}{\sin a}\right)$

⑤ $\int \tan a.\tan b\,dx = \int(\tan a.\tan b + 1 - 1).dx$

$= \int\left(\frac{\cos a.\cos b + \sin a.\sin b}{\cos a.\cos b} - 1\right).dx$

$= \int\left(\frac{\cos(a-b)}{\cos a.\cos b} - 1\right).dx = \int\left[\frac{\cos(a-b)}{\sin(a-b)}.\frac{\sin a.\cos b - \sin b.\cos a}{\cos a.\cos b} - 1\right].dx$

$= \int\left[\cot(a-b).\left(\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}\right) - 1\right].dx$

⑥ $\int f(x^n).\frac{dx}{x}$ → nhân / chia cho x^{n-1}

⑦ $\int \frac{dx}{a.\sin^2x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2x}$ → chia T & M cho $\sin^2x \neq 0$ / $\cos^2x \neq 0$

→ $t = \left| \begin{array}{l} \tan x \\ \cos x \end{array} \right.$

(8) $\displaystyle\int \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}dx = \int \frac{A.\text{mẫu} + B.(\text{đạo hàm mẫu})}{\text{mẫu}}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{a.\sin x + b\cos x + c} \rightarrow t = \tan\frac{x}{2}$

$\rightarrow \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $dt = d\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

$\hookrightarrow (*) \Leftrightarrow \displaystyle\int A\,dx + \int B\frac{d(\text{mẫu})}{\text{mẫu}} + \int \frac{e}{c.\sin x + d.\cos x}dx$

$t = \tan\dfrac{x}{2}$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a>0) \rightarrow t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c}$

$\hookrightarrow (*) \Leftrightarrow \ln\left|a + \sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C$

(11) Hàm chứa $\sqrt{a^2-x^2} \rightarrow x = a\sin t$

$\dfrac{1}{a^2+x^2} \rightarrow x = a\tan t$

Chủ đề 10 — Tích phân

Cho $y = f(x)$ liên tục $/ [a;b]$ và có ng.hàm $/ [a;b]$

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x).dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Tính chất

1. $\displaystyle\int_a^a f(x).dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(t).dt$

4. $\displaystyle\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$ $(c \in (a;b))$

5. $f(x) \geq g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x).dx > \int_a^b g(x).dx$

Bài toán đặc biệt

C.A

1. $\displaystyle\int_a^b \frac{u'.dx}{u^2+A^2} \rightarrow u = A.\tan t$ $\left(\begin{array}{l} u = (u(x)) \\ t \in (-\pi/2; \pi/2) \end{array}\right)$

2. $\displaystyle\int_a^b \frac{u'.dx}{\sqrt{A^2-u^2}} \rightarrow u = A.\sin t$ $\quad t \in (-\pi/2; \pi/2)$

$\displaystyle\int_a^b \sqrt{A^2-u^2}.u'.dx \rightarrow u = A\sin t$

3. $\displaystyle\int_a^b \frac{u'.dx}{\sqrt{u^2+A}} \rightarrow t = u + \sqrt{u^2+A}$

4. $\int_{-a}^{a} f(x).dx$; $\int_{a}^{b} f(x).dx \to \left[\begin{array}{l} t = -x \\ t = a+b-x = t \end{array}\right.$

Biết: $f(-x)$ tính theo $f(x)$ $\left[\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \to \text{h.chẵn} \\ f(-x) = -f(x) \to \text{h.lẻ} \end{array}\right.$

$f(a+b-x)$ tính theo $f(x)$

$\boxed{\text{TH}}$ ⊛ Bài toán 1:

a/ $I = \int_{\alpha}^{\beta} x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}.dx \to x = a.\sin t \quad (t \in (-\pi/2; \pi/2))$

b/ $I = \int_{\alpha}^{\beta} x^{2n}\sqrt{a^2-b^2x^2}.dx \to bx = a\sin t$ ______

c/ $I = \int_{\alpha}^{\beta} x^{2n}\sqrt{ax^2+bx+c}.dx \quad (a>0;\ \Delta = b^2-4ac>0)$

↳ Viết $ax^2+bx+c = p^2 - q^2(x+r)^2$

Đặt: $q.(x+r) = p.\sin t \quad (t \in (-\pi/2; \pi/2))$

⊛ Bài toán 2:

a/ $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^{2n}.dx}{a^2+x^2} \to x = a.\tan t \quad (t \in (-\pi/2; \pi/2))$

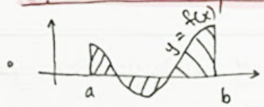
b/ $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^{2n}.dx}{a^2+b^2x^2} \to bx = a.\tan t$ (______)

c/ $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^{2n}.dx}{ax^2+bx+c} \quad (a>0;\ \Delta>0)$

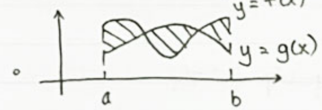
$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^{2n}.dx}{p^2+q^2(x+r)^2} \to q(x+r) = p.\tan t$ ($t\in$ ___)

Ứng dụng của tích phân

① Diện tích hình phẳng:



→ $\boxed{S = \int_a^b |f(x)|.dx}$

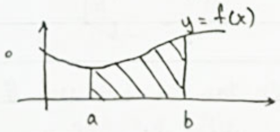


→ $\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx}$

! Lưu ý: Khử dấu $|.|$

- C_1: Giải PT $f(x) - g(x) = 0$ trên $[a;b]$ → Xét dấu
- C_2: Hình vẽ (đồ thị trên trừ dưới)
- C_3: Nếu PT $f(x) - g(x) = 0$ vô n_0 / $[a;b]$

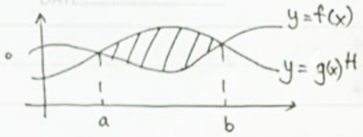
⇒ $S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)].dx\right|$



H $\begin{cases} y = f(x);\ \text{Trục } Ox\ (y=0) \\ x = a,\ x = b \end{cases}$

→ $\boxed{S = \int_a^b |f(x)|.dx}$

! Lưu ý: Nếu $f(x) = 0$ vô n_0 / $[a;b]$ → $S = \left|\int_a^b f(x).dx\right|$



H $\begin{cases} y = f(x);\ y = g(x) \\ x = a;\ x = b \end{cases}$

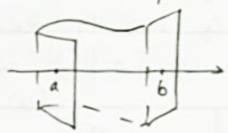
H: $y = g(x);\ y = f(x);\ y = h(x)$

↳ . Tìm từng giao từng cặp đồ thị
. Vẽ đồ thị

② Thể tích vật thể bất kỳ:

a/ Vật thể trong hệ Oxyz bị chắn bởi 2 mp: $x = a;\ x = b\quad (a < b)$

$$\boxed{V = \int_a^b S(x).dx}$$



Trong đó: $S(x)$ - S thiết diện tạo ra bởi mp // yOz, cắt Ox tại điểm có hđộ x $(a \le b \le x)$

b/ V khối tròn xoay sinh ra khi quay h phẳng quanh Ox

D $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ xq Ox $\Rightarrow$ $\boxed{V = \pi\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]^2 dx}$

c/ V khối tròn xoay sinh ra khi quay h phẳng quanh Oy

D $\begin{cases} x = g(y)\ ;\ x = f(y) \\ y = a\ ;\ y = b \end{cases}$ xq Oy $\Rightarrow$ $\boxed{V = \pi\int_a^b \left[f(y) - g(y)\right]^2.dy}$

③ Bài toán vận tốc:

a/ Bài toán 1: Cho chất điểm cđ có pt quãng đg là (theo tgian t): $S = S(t)\ (m)$

- Vtốc: $v = v(t) = S'(t)$
- Gia tốc: $a = a(t) = v'(t) = S''(t)$

b/ Bài toán 2: Ngc lại, có: $v = v(t) = \int a(t).dt$

$S = S(t) = \int v(t).dt$

↳ Vật cđ từ thời điểm t, S vật đi đc là:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} v(t).dt}$$

VD: 1 ô tô đg chạy → phanh → cđ chậm dần đều với $v(t) = -40t + 20$ (m/s). Từ lúc phanh → dừng hẳn, ô tô di chuyển bn m?

Dừng hẳn: $v(t) = -40t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5$

$\Rightarrow S = \int_0^5 (-40t + 20).dt$

DATE

VD: 1 ô tô đg chạy với $v = 20 m/s$ → phanh → cđ cdđ vs $v = -40t + 20$ (m/s). $S_{\text{phanh} \to \text{dừng}} = ?$

- $v = -40t + 20$

  $v(0) = 20 m/s$

  $v(t) = -40t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}5$

- $S(t) = \int_0^{0,5} v(t).dt = -20t^2 + 20t \Big|_0^{0,5} = 5$

UNIVERSITY of GREENWICH

DATE

Chủ đề 11 — Số phức

① ĐN: • $z = a + bi$ $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ i^2 = -1 \end{cases}$ | a - phần thực, b - ___ ảo

• Tập hợp tất cả các số phức : $\mathbb{C}$

② Biểu diễn HH: $M(a;b)$ $\begin{cases} Ox: \text{trục thực} \\ Oy: \text{\_\_ ảo} \end{cases}$

③ Phép $+ ; - ; \times ; \div$:

- $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
- $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

  ↳ $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$
- $\dfrac{z'}{z} = z'.z^{-1} = \dfrac{z'\bar{z}}{|z|^2}$

  $\rightarrow \boxed{\dfrac{z'}{z} = \dfrac{a.a' - bb'}{a^2 + b^2} + \dfrac{a'b + ab'}{a^2 + b^2} \cdot i}$
- $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \cdot (a - bi)$

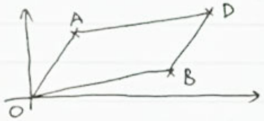
  $\Rightarrow \boxed{z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} \cdot i}$

④ Số phức liên hợp, Môđun sp':

- $\bar{z} = a - bi$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

⑤ Chú ý: • $|z| = |\overline{z}|$
• $|z^n| = |z|^n$
• $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
• $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$
• $z.\overline{z} = |z|^2$

• Gọi A đ² bdhh z_1 $\quad OA = |z_1|$; $OB = |z_2|$
B ______ z_2 $\quad AB = |z_1 - z_2|$
$OD = |z_1 + z_2|$



(OADB là hbh)

⑥ Tập hợp đ² bdhh: $M(x;y)$

• $ax + by + c = 0$ $(a^2+b^2>0)$ → (d)
• $(x-a)^2 + (x-b)^2 = R^2$ → đtròn $I(a;b)$; R
• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ → elip [trục lớn 2a, trục nhỏ 2b

• TH : $|z + a + bi| = A > 0$ → đtròn $I(a;b)$; $R = A$

Chủ đề 12 CSC - CSN

① CSC: • $u_n = u_1 + (n-1)d$
• $u_{k+1} = \frac{u_k + u_{k+2}}{2}$
• $S_n = \frac{(u_1 + u_n).n}{2} = (2u_1 + (n-1)d).\frac{n}{2}$

② CSN: • $u_n = u_1 . q^{n-1}$
• $u_{k+1}^2 = u_k . u_{k+2}$
• $S_n = u_1.\frac{(1+q)^n - 1}{(1+q) - 1}$

• Tổng CSN lùi vô hạn: $|q| < 1$
$S = u_1 + u_1 q + u_2 . q^2 + \dots + u_n q^n = \frac{u_1}{1-q}$

Chủ đề 13 tổ hợp - xác suất

① Chỉnh hợp (có xếp thứ tự): • $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad (k, n \in \mathbb{Z}; 0 \le k \le n)$

② Tổ hợp (ko xếp thứ tự): • $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

⊛ Công thức Pascal: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

MegaBook
Chuyên Gia Sách Luyện Thi

↳ Mở rộng: $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$

③ Nhị thức Newton:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}.b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$

(Số mũ n → có n+1 cái C)

$= \boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$

Hình học 12

Chủ đề

KHOẢNG CÁCH

K/c từ 1 điểm → đt'

- C_1: - B_1: Tìm hchiếu ⊥ H của A trên đt' (Δ)
  - B_2: $d(A, \Delta) = AH$

- C_2: - Tìm H bằng PP tọa độ:
  - + Viết pt tham số của (Δ)
    - → Tọa độ H dưới dạng tham số
  - + Dùng đk $AH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} . \vec{u}_\Delta = 0$
    - → Tìm được tọa độ H
    - ($\vec{u}_\Delta = (a; b; c)$: vtơ chỉ phương)
  - $d(A, \Delta) = AH$

- C_3: $d(A, \Delta) = \dfrac{|[\vec{u}_\Delta, \overrightarrow{AM}]|}{|\vec{u}_\Delta|}$

↳ Hệ quả: K/c 2 đt' // (Δ) & (Δ')

$M \in (\Delta)$; $M' \in (\Delta')$

$\Rightarrow d(\Delta, \Delta') = d(M, \Delta') = d(M', \Delta)$

K/c giữa 2 đt' chéo nhau

- C_1: Chọn mp (α) chứa (Δ), $(\alpha) \parallel (\Delta')$ $\rightarrow d(\Delta, \Delta') = d(\Delta', (\alpha))$
- C_2: Dựng 2mp // chứa 2 đt' $\rightarrow d(\Delta, \Delta') = d((\alpha); (\beta))$
- C_3: Dựng đoạn vuông góc chung
- C_4: - Viết pt mp (α) chứa (Δ), $(\alpha) \parallel (\Delta')$

  $\Rightarrow d(\Delta, \Delta') = d(\Delta', (\alpha)) = d(M, (\alpha))$
- C_5: $d(\Delta, \Delta') = \dfrac{|[\vec{u_\Delta}, \vec{u_{\Delta'}}] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{u_\Delta}, \vec{u_{\Delta'}}]|}$

Chủ đề 1: KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

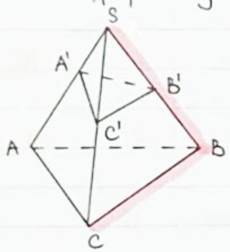
! Chú ý:
- Kí hiệu: $[n; p]$
  - n: số cạnh đa giác đều
  - p: số cạnh đi qua 1 đỉnh
- Đ + M = C + 2

Loại	Tên	Đ	M	C	Số mp đx
[3; 3]	Tứ diện đều	4	6	4	6
[4; 3]	Lập phương	8	12	6	9
[3; 4]	Bát diện đều	6	12	8	9
[5; 3]	12 mặt đều	20	30	12	
[3; 5]	20 mặt đều	12	30	20	

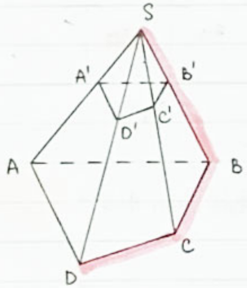
! [pĐ = 2C = nM]
- $V_{\text{tứ diện đều}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
- $V_{\text{bát diện đều}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$
- $V_{\text{lập phg}} = a^3$

Thể tích khối đa diện

- $V_{chóp} = \frac{1}{3} B.h$ (B - $S_{đáy 1}$, B' - $S_{đáy 2}$)
- $V_{lăng\ trụ} = B.h$
- $V_{chóp\ cụt} = \frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}).h$
- $V_{hộp\ chữ\ nhật} = abc$
- $V_{lập\ phương} = a^3$



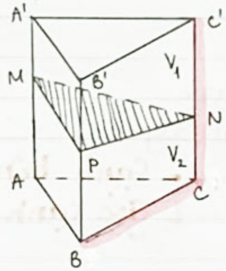
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$



Nếu $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = k$$

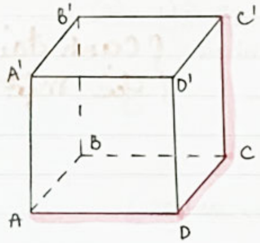
$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = k^3$$



V_1 - V nửa trên ; V_2 - V nửa dưới

$\frac{AN}{AA'} = m$; $\frac{BP}{BB'} = n$; $\frac{CN}{CC'} = p$

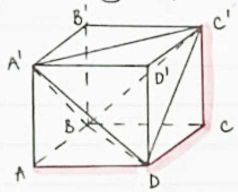
$$\rightarrow V_2 = \frac{(m+n+p)}{3} . V$$



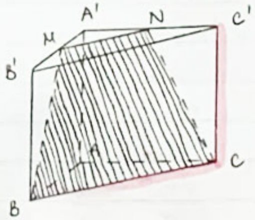
V_n - V khối tạo từ n/ 8 đỉnh

$V_4 = \frac{V}{6}$ $V_5 = \frac{V}{3}$ $V_6 = \frac{V}{2}$

Trường hợp đặc biệt



$$V_{A'C'BD} = \frac{V}{3}$$



$$V_{AMN.ABC} = \frac{7}{12} V_{A'B'C'.ABC}$$

! Ghi nhớ:

1. Hchiếu đỉnh ≡ tâm đtròn ngt đáy: (R) → 3 đg trung trực

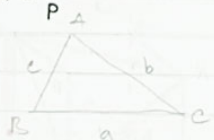
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} SA = SB = SC = \dots \\ (\widehat{SA, đáy}) = (\widehat{SB, đáy}) = \dots \end{array}\right.$ [cạnh bên / góc cạnh

2. Hchiếu đỉnh ≡ tâm đtròn nt đáy: (r) → 3 đg pgiác

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Góc giữa các mặt bên = nhau} \\ \text{Đáy = nhau} \end{array}\right.$ { cạnh đáy / góc mặt

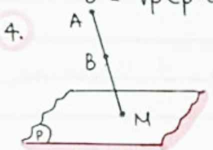
3. Công thức:

- $S = \dfrac{abc}{4R} = p.r$ $\quad \left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$
- $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$; $r = \dfrac{S}{p}$
- $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} ab.\sin C$



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$
- $S' = S.\cos\varphi$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (CT Herong)

4. $AB \cap (P) = \{M\}$



$\rightarrow \boxed{\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \dfrac{AM}{BM}}$

5. Công thức trung tuyến Δ: $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

UNIVERSITY of GREENWICH
DATE

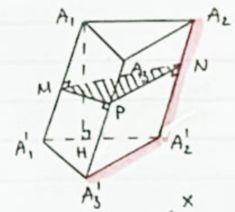
Chủ đề 2

mặt cầu khối cầu

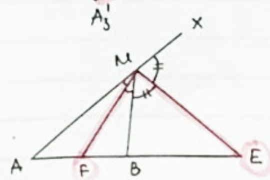
$\boxed{S_{m/c} = 4\pi R^2}$ $\quad \boxed{V_{k/c} = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$

$\boxed{V_{chỏm\ cầu} = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)}$

! Ghi nhớ:

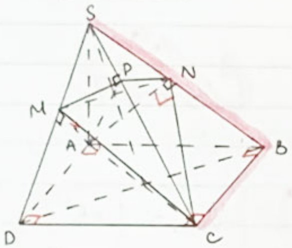


$V_{lăng\ trụ} = A_1A_1'.\ S_{thiết\ diện\ vuông}$
$= A_1A_1'.\ S_{\Delta MNP}$



$\boxed{\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{FA}{FB} = \dfrac{EA}{EB}}$

• Bài toán:



1. $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90°$

→ M, N ∈ m/c đkính AB

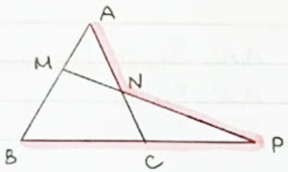
2. 7 điểm luôn ∈ m/c đkính AC (trong hình):

A, B, C, D, M, N, P

3. ∃! 1 m/c đi qua 4 đ' A, B, C, D ko đồng phẳng cho trước

↳ Nghĩa là: Nếu A, B, C, D, E cùng ∈ 1 m/c thì m/c qua 4 trong 5 đ' đó cho cx là m/c ban đầu.

• Bài toán: Menelauyt



Xét △ABC:

$$\boxed{\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1}$$

Chủ đề 3 MẶT TRÒN XOAY

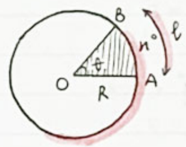
mặt tròn xoay

! Ghi nhớ:

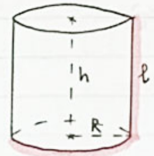
• $S_{h.tròn} = \pi R^2$ • $C_{h.tròn} = 2\pi R$

• Độ dài cung tròn: $\ell = \theta . R$

• $S_{h.\,quạt\ tròn}$: $S = \frac{\ell R}{2}$



(θ: số đo góc (rad))



Hình trụ:

$S_{xq} = 2\pi R l$

$S_{tp} = 2\pi R(R + l)$

$V = \pi R^2 h$

Hình nón:

$S_{xq} = \pi R l$

$S_{tp} = \pi R(R + l)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Hình nón cụt:

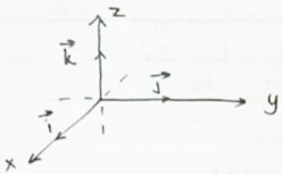
$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)\ell$

$S_{tp} = \pi(r_1 + r_2)\ell + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Chủ đề 4 — hệ trục oxyz

① Hệ trục - Tọa độ vtơ / điểm:



- $\vec i^2 = \vec j^2 = \vec k^2 = 1$
- $\vec i\vec j = \vec j\vec k = \vec k\vec i = \vec 0$
- $\vec u = (x;y;z)$
- $\to \vec u = x\vec i + y\vec j + z\vec k$

② Tính chất:

$\vec{u_1} = (x_1;y_1;z_1)$; $\vec{u_2} = (x_2;y_2;z_2)$

$A(x_A;y_A;z_A)$; $B(x_B;y_B;z_B)$

- $\vec{u_1} = \vec{u_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 ; y_1 = y_2 ; z_1 = z_2$
- $\vec{u_1} \pm \vec{u_2} = (x_1 \pm x_2 ; y_1 \pm y_2 ; z_1 \pm z_2)$
- $k\vec{u_1} = (kx_1 ; ky_1 ; kz_1)$
- $\vec{u_1}.\vec{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1.z_2 = |\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|.\cos(\vec{u_1}, \vec{u_2})$
- $|\vec{u_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
- $\cos(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = \dfrac{\vec{u_1}.\vec{u_2}}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$
- $\vec{u_1} \perp \vec{u_2} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u_1}.\vec{u_2} = 0$
- M - trung điểm AB $\Leftrightarrow M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2} ; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- G - trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} ; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

③ Tích có hướng của vecto và ứng dụng:

$$\vec a \wedge \vec b = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_2 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1)$$

- $(\vec a \wedge \vec b).\vec a = 0$; $(\vec a \wedge \vec b).\vec b = 0$
- $|\vec a \wedge \vec b| = |\vec a|.|\vec b|.\sin(\vec a, \vec b)$
- $\vec a \wedge \vec b = \vec 0 \to \vec a, \vec b$ cùng phương

④ Ứng dụng:
- A, B, C thẳng hàng: $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec 0$
- A, B, C, D đồng phẳng: $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}).\vec{AD} = 0$
- $\vec a, \vec b, \vec c$ ______ : $(\vec a \wedge \vec b).\vec c = 0$

- $S_{hbh\ ABCD} = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}|$
- $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$
- $V_{hộp\ ABCD.A'B'C'D'} = |(\vec{AB} \wedge \vec{AD}).\vec{AA'}|$
- $V_{tứ\ diện\ ABCD} = \dfrac{1}{6}|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}).\vec{AD}|$

Chủ đề 5 — pt mặt phẳng, pt mặt cầu

① VTPT_pt mp: $\vec{n} \perp (P)$

NX
- $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ $\perp (P)$
- $\vec{n} \perp \vec{a}$; $\vec{n} \perp \vec{b}$ → $\vec{n} \parallel (\vec{a} \wedge \vec{b})$
- $(\alpha) \parallel (\beta) \to \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta$

  $(\alpha) \perp (\beta) \to \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$

- $\begin{cases} \vec{n}_P = (A, B, C) & (A^2+B^2+C^2>0) \\ M(x_0; y_0; z_0) \in (P) \end{cases}$

→ PT (P): $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

- PT đoạn chắn: (P) cắt Ox; Oy; Oz tại $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ $(abc \neq 0)$

  → PT (P): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

- (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\quad (A^2+B^2+C^2>0)$

  (Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

  - $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ → $\equiv$
  - $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ → $\parallel$
  - $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ → cắt theo 1 đt

② VTCP _ pt đt _ pt tham số _ pt chính tắc: $\vec{u} \parallel (d)$

- (d) $\begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \vec{u}_d = (a, b, c) \quad (a^2+b^2+c^2>0) \end{cases}$

→ PT tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

→ PT chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

③ PT mặt cầu:

- Tâm I, bk $R > 0$:

→ PT chính tắc: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

- PT tổng quát: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ $\quad (a^2+b^2+c^2-d>0)$

  ↳ Tâm $I(-a; -b; -c)$; $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Chủ đề 6 — vị trí tương đối góc - khoảng cách

① **VTTĐ g̃ 2 mp̉** $\begin{cases} (P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

- $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \rightarrow \equiv$
- $\rule{3cm}{0.4pt} \neq \rule{1cm}{0.4pt} \rightarrow \parallel$
- $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2 \rightarrow$ Cắt theo đt'

② **VTTĐ g̃ 2 đt'** $\begin{cases} (d_1): \text{ qua } M_1, \text{ VTCP } \vec{u_1} \\ (d_2): \text{ — } M_2, \text{ — } \vec{u_2} \end{cases}$

- $(\vec{u_1} \wedge \vec{u_2})\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0 \rightarrow$ chéo nhau
- $\rule{3cm}{0.4pt} = 0 \rightarrow$ đồng phẳng
  - +) $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} \neq 0 \rightarrow \vec{u_1}, \vec{u_2}$ ko cùng phg $\rightarrow d_1$ cắt d_2
  - +) $\begin{cases} \vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = 0 \\ \vec{u_1} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ cp $\rightarrow d_1 \equiv d_2$
  - +) $\begin{cases} \vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = 0 \\ \vec{u_1} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ cp} \\ \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ ko cp } \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases} \rightarrow d_1 \parallel d_2$

③ **VTTĐ g̃ đt' & mp̉:** $\begin{cases} (P) - \text{VTPT } \vec{n_P} \\ (d) - \text{VTCP } \vec{u_d}, \text{ qua } M_0 \end{cases}$

- $\vec{n_P}\,\vec{u_d} \neq 0 \rightarrow$ cắt tại 1 điểm
- $\begin{cases} \vec{n_P} \cdot \vec{u_d} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \rightarrow \parallel$
- $\begin{cases} \vec{n_P} \cdot \vec{u_d} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \rightarrow d \subset (P)$

④ **Góc:**

- $\cos((P),(Q)) = |\cos(\vec{n_P}, \vec{n_Q})| = \left| \dfrac{\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q}}{|\vec{n_P}| \cdot |\vec{n_Q}|} \right|$
- $\cos((d_1),(d_2)) = |\cos(\vec{u_{d_1}}, \vec{u_{d_2}})| = \ldots$
- $\sin(d,(P)) = |\cos(\vec{u_d}, \vec{n_P})| = \ldots$

⑤ **Khoảng cách:**

- $d(M_0,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- $d(M_0,(d)) = \dfrac{|\vec{u_d} \wedge \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{u_d}|}$ $(M_1 \in (d))$
- $d(d_1;d_2)$ (chéo nhau) $= \dfrac{|(\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}|}$ $(M_1 \in d_1; M_2 \in d_2)$

Tỉ số
Góc