SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HÀ NỘI**	**KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ** **LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020 - 2021**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN** Ngày thi thứ nhất: *19/10/2020* Thời gian làm bài: *180 phút* *(Đề thi gồm 01 trang)*

Bài 1 (*5 điểm*)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2^n u_n+3}, \forall n\ge 1.$

Tìm giới hạn $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

Bài 2 (*5 điểm*)

Cho đa thức $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_9)-3$, trong đó $a_1,a_2,...,a_9$ là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 3 (*5 điểm*)

Cho tam giác ABC cân tại $A\left(\widehat{BAC}<90^0\right)$ và M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CM sao cho $\widehat{CBN}=\widehat{ACM}$.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

b) Đoạn thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai P. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh đường thẳng NP đi qua trung điểm của đoạn thẳng MI.

Bài 4 (*5 điểm*)

Tìm số bộ số nguyên dương $(a_1,a_2,...,a_{15})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $1\le a_1<a_2<...<a_{15}\le 2020$;

ii) $a_i\equiv i^2 \pmod 5$, $\forall i=1,2,...,15$.

.... Hết ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi thứ hai: *20/10/2020*
Thời gian làm bài: *180 phút*
(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 5 (*6 điểm*)

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(4xf(x)+f(y)\right)=4\left(f(x)\right)^2+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài 6 (*7 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S. Qua S kẻ các tiếp tuyến SX, SY tới đường tròn (O), với X, Y là các tiếp điểm.

a) Chứng minh D, X và Y là ba điểm thẳng hàng.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng XY và EF. Chứng minh đường thẳng IH đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

Bài 7 (*7 điểm*)

Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3.

a) Chứng minh $\sum_{i=1}^{p-1}\left(C_p^i\right)^2\equiv 0 \pmod{p^3}$.

b) Cho n là một số nguyên dương thỏa mãn $n\equiv 1 \pmod{p}$.

Chứng minh $C_{np}^{p}\equiv n \pmod{p^4}$.

.... Hết ....

ĐỀ THI CHỌN ĐT HSG QUỐC GIA TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2020-2021

Phan Phương Đức - Nguyễn Tiến Dũng

A. NGÀY THỨ NHẤT (19/10/2020)

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2^n u_n + 3}$, $\forall n \geq 1$. Tìm giới hạn $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

Bài 2. Cho đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_9) - 3$, trong đó $a_1, a_2, \cdots, a_9$ là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle BAC < 90^\circ$) và M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CM sao cho $\angle CBN = \angle ACM$.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

b) Đoạn thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai là P. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh đường thẳng NP đi qua trung điểm của đoạn thẳng MI.

Bài 4. Tìm số bộ nguyên dương $(a_1, a_2, \cdots, a_{15})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{15} \leq 2020$;

ii) $a_i \equiv i^2 \pmod 5$, $\forall i = 1, 2, \cdots, 15$.

B. NGÀY THỨ HAI (20/10/2020)

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(4xf(x) + f(y)) = 4(f(x))^2 + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S. Qua S kẻ các tiếp tuyến SX, SY tới đường tròn (O), với X, Y là các tiếp điểm.

a) Chứng minh D, X, Y thẳng hàng.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng XY và EF. Chứng minh đường thẳng IH đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

Bài 7. Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3.

a) Chứng minh $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(C_p^i\right)^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$.

b) Cho n là một số nguyên dương thỏa mãn $n \equiv 1 \pmod p$. Chứng minh $C_{np}^p \equiv n \pmod{p^4}$.

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2^n u_n + 3}$, $\forall n \geq 1$. Tìm giới hạn $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

Lời giải:

Từ giả thiết, dễ chứng minh bằng quy nạp: $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, ta có: $\dfrac{1}{u_{n+1}} = 2^n + \dfrac{3}{u_n}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} + 2^{n+1} = 3\left(\dfrac{1}{u_n} + 2^n\right) = \cdots = 3^n\left(\dfrac{1}{u_1} + 2\right) = 3^{n+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u_n} = 3^n - 2^n \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{3^n - 2^n}, \forall n \in \mathbb{R}$

Khi đó, $\lim \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{3^n - 2^n}} = \dfrac{1}{3 \lim \sqrt[n]{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}} = \dfrac{1}{3}$.

Bài 2. Cho đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_9) - 3$, trong đó $a_1, a_2, \cdots, a_9$ là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Lời giải:

Giả sử có thể phân tích được $P(x) = F(x).G(x)$, với $F(x), G(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg F, \deg G \geq 1$.

KMTTQ, giả sử $\deg F \leq \deg G$. Do $\deg F + \deg G = \deg P = 9$ nên $\deg F \leq 4$.

Từ đề bài, ta có: $F(a_i).G(a_i) = 3$, $\forall i = \overline{1,9} \Rightarrow F(a_i) \in \{\pm 1; \pm 3\}$, $\forall i = \overline{1,9}$. Do $1 \leq \deg F \leq 4$ nên không tồn tại 5 giá trị $F(a_i)$ bằng nhau.

Mặt khác, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ≥ 3 giá trị $F(a_i)$ bằng nhau. KMTTQ, giả sử $F(a_1) = F(a_2) = F(a_3) = a \Rightarrow F(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)Q(x) + a$, $(a \in \{\pm 1; \pm 3\})$.

Khi đó, ta xét các TH sau:

TH1: Nếu tồn tại $i \neq j \in \overline{4,9}$ mà $F(a_i), F(a_j) = a \pm 2$

$\Rightarrow (a_i - a_1)(a_i - a_2)(a_i - a_3)Q(a_i) = \pm 2$; $(a_j - a_1)(a_j - a_2)(a_j - a_3)Q(a_j) = \pm 2$.

Do $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \Rightarrow a_i - a_1; a_i - a_2; a_i - a_3$ có 1 số bằng 1, 1 số bằng -1, 1 số bằng ± 2.

KMTTQ, giả sử $a_i - a_1 = 1$; $a_i - a_2 = -1$.

Tương tự, $a_j - a_1; a_j - a_2; a_j - a_3$ có 1 số bằng 1, 1 số bằng -1, 1 số bằng ± 2.

$\Rightarrow a_i - a_1 + a_i - a_2 + a_i - a_3 \equiv 0 \equiv a_j - a_1 + a_j - a_2 + a_j - a_3 \pmod 2 \Rightarrow a_i \equiv a_j \pmod 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i - a_1 \equiv a_j - a_1 \pmod 2 \Rightarrow a_j - a_1 = -1 \\ a_i - a_2 \equiv a_j - a_2 \pmod 2 \Rightarrow a_j - a_2 = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow a_i - a_1 + a_i - a_2 = 0 = a_j - a_1 + a_j - a_2 \Rightarrow a_i = a_j$ (vô lí).

TH2: Nếu không tồn tại i, j thỏa mãn TH1, thì phải có 5 giá trị, KMTTQ là a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 sao cho $F(a_5) = F(a_6) = F(a_7) = F(a_8) = b$; $F(a_9) = b \pm 2$.

$\Rightarrow F(x) = (x - a_5)(x - a_6)(x - a_7)(x - a_8) + b \Rightarrow (a_9 - a_5)(a_9 - a_6)(a_9 - a_7)(a_9 - a_8) = \pm 2$.

Khi đó, phải có 2 trong các số $a_9 - a_5, a_9 - a_6, a_9 - a_7, a_9 - a_8$ bằng nhau (vô lí).

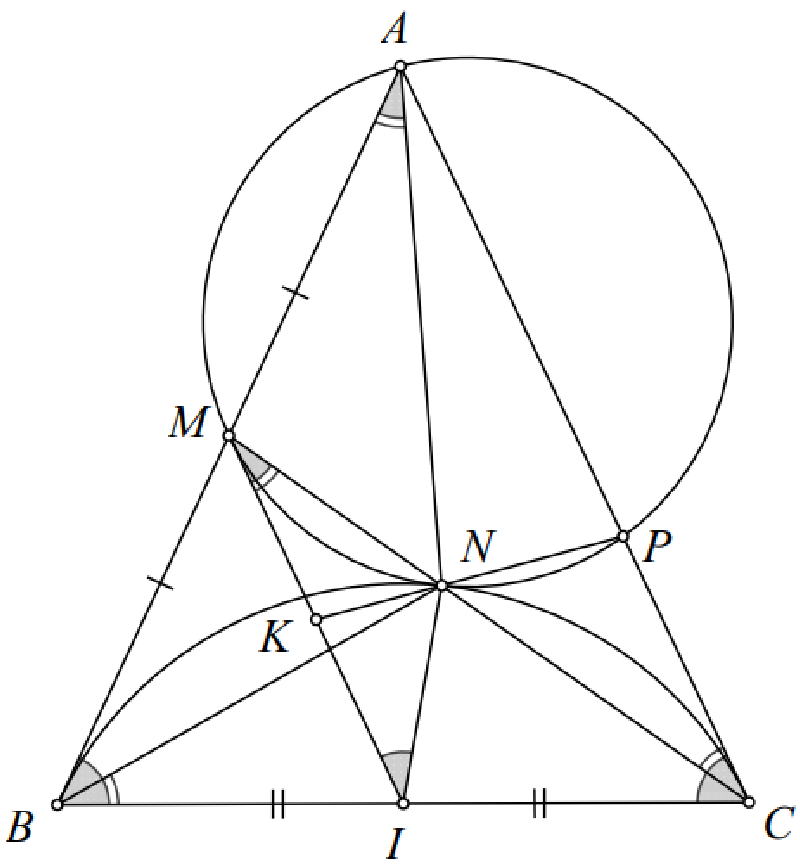
Suy ra đpcm.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle BAC < 90°$) và M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CM sao cho $\angle CBN = \angle ACM$.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

b) Đoạn thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai là P. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh đường thẳng NP đi qua trung điểm của đoạn thẳng MI.

Lời giải:



a) Vì $\angle ABC = \angle ACB$ và $\angle CBN = \angle ACM$ nên $\angle ABN = \angle BCN$.

$\Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle MCB\ (g.g) \Rightarrow \angle BNM = \angle MBC$ và $MN.MC = MB^2 = MA^2$

$\Rightarrow \triangle MAN \sim \triangle MCA\ (c.g.c) \Rightarrow \angle MAN = \angle MCA$.

Ta có $\angle BNM = \angle ABC = \angle ACB = \angle BCN + \angle ACM = \angle BCN + \angle MAN$.

Từ đó, ta thấy (BCN) tiếp xúc với (AMN).

b) Do MI là đường trung bình $\triangle ABC$ nên $MI \parallel CA$. Suy ra $\angle MIB = \angle ACB = \angle MNB$

$\Rightarrow BMNI$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\angle NMI = \angle NBI$ và $\angle MIN = \angle MBN = \angle BCN$

$\Rightarrow \triangle NBC \sim \triangle NMI$.

Gọi PN cắt MI tại K thì $\angle MNK = \angle MAP = \angle BMI = \angle BNI$. Do NI là đường trung tuyến của $\triangle NBC$ nên NK là trung tuyến của $\triangle NMI$.

Bài 4. Tìm số bộ nguyên dương $(a_1, a_2, \cdots, a_{15})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{15} \le 2020$;

ii) $a_i \equiv i^2 \pmod 5$, $\forall i = 1, 2, \cdots, 15$.

Lời giải:

Từ đề bài, ta có: $\begin{cases} a_1 = 5k_1 - 4 \\ a_2 - a_1 = 5k_2 - 2 \\ a_3 - a_2 = 5k_3 \\ a_4 - a_3 = 5k_4 - 3 \\ a_5 - a_4 = 5k_5 - 1 \\ a_6 - a_5 = 5k_6 - 4 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{15} - a_{14} = 5k_{15} - 1 \\ 2020 - a_{15} = 5k_{16} - 5 \end{cases}$, với $k_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = \overline{1, 16}$.

$\Rightarrow 2020 = 5\sum_{i=1}^{16} k_i - 35 \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} k_i = 411$.

Ta thấy với mỗi cách chọn bộ (k_i), ta được 1 bộ số $a_1; a_2; \cdots; a_{15}$ thỏa mãn đề bài

Theo bài toán chia kẹo Euler, số cách chọn bộ (k_i) là C_{410}^{15}.

Suy ra số bộ $(a_1; a_2; \cdots; a_{15})$ thỏa mãn là C_{410}^{15}.

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(4xf(x) + f(y)) = 4(f(x))^2 + y, \quad (1)\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Thay $y = -4(f(x))^2$ vào (1), ta được $f(A) = 0$, với A là 1 biểu thức.

Thay $x = A$ vào (1), ta được $f(f(y)) = y$.

Mặt khác, thay $x = 0$ vào (1), ta được $f(f(y)) = 4f^2(0) + y \Rightarrow f(0) = 0$.

Thay $y = 0$ vào (1), ta được $f(4xf(x)) = 4f^2(x) \quad (2)$

Thay $x \to f(x)$ vào (2), ta được: $f(4f(x)f(f(x))) = 4f^2(f(x)) \Rightarrow f(4xf(x)) = 4x^2 \quad (3)$.

Từ (2) và (3) suy ra $f^2(x) = x^2 \Rightarrow f(a) = a$ hoặc $f(a) = -a$, với mọi số thực a.

Giả sử tồn tại $a, b \ne 0$ sao cho $f(a) = a$ và $f(b) = -b$.

Thay $x = a, y = b$ vào (1), ta được $f(4a^2 - b) = 4a^2 + b$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4a^2 - b = 4a^2 + b \\ b - 4a^2 = 4a^2 + b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$ (vô lí).

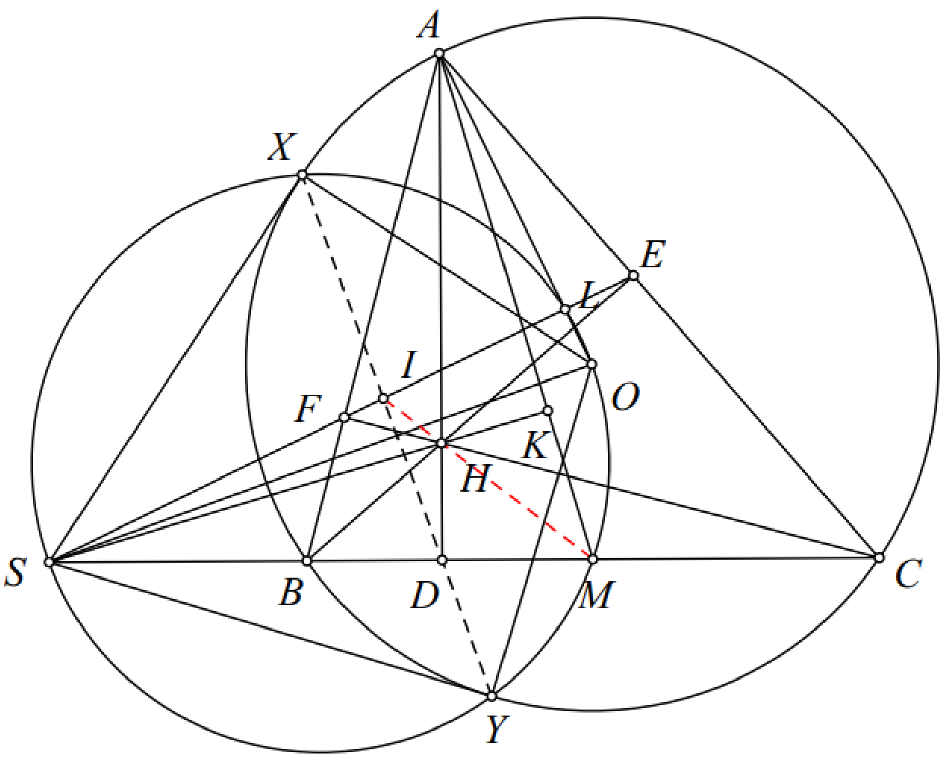
Vậy $\left[\begin{array}{l} f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ (thử lại thỏa mãn).

Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S. Qua S kẻ các tiếp tuyến SX, SY tới đường tròn (O), với X, Y là các tiếp điểm.

a) Chứng minh D, X, Y thẳng hàng.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng XY và EF. Chứng minh đường thẳng IH đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

Lời giải:



a) Do AD, BE, CF đồng quy tại H nên $(SD; BC) = -1$. Chú ý rằng SX, SY là các tiếp tuyến của (O), theo hàng điều hòa cơ bản trong đường tròn ta có X, I, Y thẳng hàng.

b) Gọi M là trung điểm BC. Vì $(DS; BC) = -1$ và H là trực tâm $\triangle ABC$ nên theo hệ thức Maclaurin ta có $DM.DS = DB.DC = DA.DH$. Từ đó ta thấy H là trực tâm $\triangle AMS$. Hạ $SH \perp AM$ tại K.
Theo kết quả quen thuộc, gọi $AO \perp EF$ tại L. Vì $\angle SXO = \angle SYO = \angle SLO = 90^\circ$ và $\angle ADS = \angle AKS = \angle ALS = 90^\circ$ nên S, X, Y, O, L cùng thuộc đường tròn (SO) đường kính SO và A, D, K, L, S cùng thuộc đường tròn đường kính AS.
Chú ý M, D, E, F cùng thuộc đường tròn Euler của $\triangle ABC$, ta có:

$$SX^2 = SY^2 = SB.SC = SE.SF = SD.SM$$

Xét phép nghịch đảo tâm S phương tích SX^2 : $M \leftrightarrow D, H \leftrightarrow K, (SO) \leftrightarrow (XY), SE \leftrightarrow SE$ và $I \leftrightarrow L$.
Do S, D, K, L đồng viên nên M, H, I thẳng hàng.

Bài 7. Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3.

a) Chứng minh $\sum_{i=1}^{p-1} \left(C_p^i\right)^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$.

b) Cho n là một số nguyên dương thỏa mãn $n \equiv 1 \pmod{p}$. Chứng minh $C_{np}^p \equiv n \pmod{p^4}$.

b) Ta có $C_{np}^p \equiv n \pmod{p^4} \Leftrightarrow \dfrac{(np)!}{p!(np-p)!} - n \vdots p^4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(np-1)(np-2)\cdots(np-p+1)}{(p-1)!} - 1 \vdots p^4$ (do $(n,p)=1$)

$\Leftrightarrow (np-1)(np-2)\cdots(np-p+1) - (p-1)! \vdots p^4$ (do $((p-1)!, p^4) = 1$) (1)

Do $n \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow n = kp+1$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (kp^2+1)(kp^2+2)\cdots(kp^2+p-1) - (p-1)! \vdots p^4$.

Xét $F(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) - x^{p-1} + 1$. Do $p \in \mathbb{P} \Rightarrow F(1) \equiv F(2) \equiv \cdots \equiv 0 \pmod{p}$.

Mà $\deg F = p-2 \Rightarrow$ tất cả các hệ số của $F(x)$ đều chia hết cho p.

Do $F(p) = (p-1)! - p^{p-1} + 1 \equiv (p-1)! + 1 \pmod{p^3}$. (2)

Đặt $F(x) = a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

$\Rightarrow a_0 = (p-1)! + 1$ và $F(p) \equiv a_2 p^2 + a_1 p + (p-1)! + 1 \pmod{p^3}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $a_2p^2 + a_1 p \vdots p^3$, mà $a_2 \vdots p \Rightarrow a_1 \vdots p^2$.

Khi đó, $(kp^2+1)(kp^2+2)\cdots(kp^2+p-1) - (p-1)! = B.(kp^2)^2 + a_1.kp^2 \vdots p^4$. Suy ra đpcm.

a) Ta có công thức quen thuộc: $(C_p^0)^2 + (C_p^1)^2 + \cdots + (C_p^p)^2 = C_{2p}^p$ (đếm bằng 2 cách)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \left(C_p^i\right)^2 = C_{2p}^p - 2 = \dfrac{(2p!)}{(p!)^2} - 2 = \dfrac{2(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)}{(p-1)!} - 2.$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \left(C_p^i\right)^2 \equiv 0 \pmod{p^3} \Leftrightarrow (2p-1)(2p-2)\cdots(2p-p+1) - (p-1)! \vdots p^3$.

Tương tự câu b, ta thấy $(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1) - (p-1)! = C.(2p)^3 + a_2.(2p)^2 + a_1.(2p) \vdots p^3$,

do $a_2 \vdots p,\ a_1 \vdots p^2$.

Suy ra đpcm.