Nguyễn Xuân Nam

3Step

TIẾT LỘ BÍ QUYẾT 3 BƯỚC ĐẠT ĐIỂM 8+

TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

CHUYÊN ĐỀ 3 NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ. TÍCH PHÂN

A KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dạng 1: Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức

$$g(x).f'(x)+g'(x).f(x)=h(x).$$

Phương pháp:

Dễ thấy $g(x).f'(x)+g'(x).f(x)=\left[g(x).f(x)\right]'$.

Do đó $g(x).f'(x)+g'(x).f(x)=h(x)\Leftrightarrow\left[g(x).f(x)\right]'=h(x)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int\left[g(x).f(x)\right]'dx=\int h(x)dx\Rightarrow g(x).f(x)=\int h(x)dx.$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

Dạng 2: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức

$$f'(x)+f(x)=h(x).$$

Phương pháp:

Nhân cả hai vế với e^x ta được: $e^x.f'(x)+e^x.f(x)=e^x.h(x)$

$\Leftrightarrow\left[e^x.f(x)\right]'=e^x.h(x)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int\left[e^x.f(x)\right]'dx=\int e^x.h(x)dx\Rightarrow e^x.f(x)=\int e^x.h(x)dx.$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

Dạng 3: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức

$f'(x)-f(x)=h(x)$.

Phương pháp:

Nhân cả hai vế với e^{-x} ta được: $e^{-x}.f'(x)-e^{-x}.f(x)=e^{-x}.h(x)$

$\Leftrightarrow\left[e^{-x}.f(x)\right]'=e^{-x}.h(x)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int\left[e^{-x}.f(x)\right]'dx=\int e^{-x}.h(x)dx\Rightarrow e^{-x}.f(x)=\int e^{-x}.h(x)dx.$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

Dạng 4: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức

$$f'(x)+g(x).f(x)=h(x).$$

Phương pháp:

Nhân cả hai vế với $e^{\int g(x)dx}$ ta được:

$f'(x).e^{\int g(x)dx}-g(x).e^{\int g(x)dx}.f(x)=h(x).e^{\int g(x)dx}\Leftrightarrow\left[f(x).e^{\int g(x)dx}\right]'=h(x).e^{\int g(x)dx}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int\left[f(x).e^{\int g(x)dx}\right]'dx=\int h(x).e^{\int g(x)dx}dx \Rightarrow f(x).e^{\int g(x)dx}=\int h(x).e^{\int g(x)dx}dx.$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

Dạng 5: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức

$f'(x)+g(x).f(x)=0$.

Phương pháp:

Nhân cả hai vế với $f(x)$ ta được: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-g(x)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx=-\int g(x)dx \Rightarrow \ln\left|f(x)\right|=-\int g(x)dx.$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

Dạng 6: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức

$f'(x)+g(x).f^{n}(x)=0$.

Phương pháp:

Chia cả hai vế với $f^{n}(x)$ ta được: $\dfrac{f'(x)}{f^{n}(x)}+g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^{n}(x)}=-g(x)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int\frac{f'(x)}{f^{n}(x)}dx=-\int g(x)dx \Rightarrow \frac{f^{1-n}(x)}{1-n}=-\int g(x)dx.$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

Dạng 7: Bài toán tích phân với kỹ thuật đưa về bình phương

$$\int_a^b\left[f^2(x)-2f(x).g(x)+g^2(x)\right]dx=0 \Leftrightarrow \int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

Dạng 8: Kỹ thuật đánh giá AM-GM

Cho n số thực không âm $a_1,a_2,...a_n$ ($n\geq 2$) ta luôn có

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n}.$$

Dấu “=” xảy ra kih và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$.

B BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\frac{4}{9}$. **B.** $P=-\frac{2}{9}$.

C. $P=\frac{7}{9}$. **D.** $P=-\frac{14}{9}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$.

B. $e^4f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$.

D. $e^4f(4)-f(0)=3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f'(x)-f(x)=x^2.e^x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=-1$. Tính $f(3)$.

A. $6e^3+3$. **B.** $6e^2+2$.

C. $3e^2-1$. **D.** $\frac{26}{3}e^3-1$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2018e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017e^{2018}$.

C. $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2019e^{2018}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ biết $f'(x)+(2x+3).f^2(x)=0$, $f(x)>0, \forall x>0$ và $f(1)=\frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=1+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)$.

A. $\frac{6059}{4038}$. **B.** $\frac{6055}{4038}$.

C. $\frac{6053}{4038}$. **D.** $\frac{6047}{4038}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x)>0, \forall x>0$, $f'(x)=-e^x.f^2(x), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Phương trinh tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là:

A. $2x+9y-2\ln 2-3=0$.

B. $2x-9y-2\ln 2+3=0$.

C. $2x-9y+2\ln 2-3=0$.

D. $2x+9y+2\ln 2-3=0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x).\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=\frac{2-\pi}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{\pi}{4}$.

C. $I=1$. **D.** $I=\frac{\pi}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1\left[f^2(x)+2\ln^2\left(\frac{2}{e}\right)\right]dx=2\int_0^1\left[f(x)\ln(x+1)\right]dx$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\ln\frac{e}{4}$. **B.** $I=\ln\frac{4}{e}$.

C. $I=\ln\frac{e}{2}$. **D.** $I=\ln\frac{2}{e}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo liên tục trên $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$ và $\int_0^1\left[f'(x).f^2(x)+1\right]dx=2\int_0^1\sqrt{f'(x).f(x)}dx$.

Tính $I=\int_0^1 f^3(x)dx$.

A. $I=\frac{15}{4}$. **B.** $I=\frac{15}{2}$.

C. $I=\frac{17}{2}$. **D.** $I=\frac{19}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)-f(0)=1$ và $\int_0^1 f'(x)[f^2(x)+1]dx = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}.f(x)dx$. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$.

C. $\frac{5\sqrt{33}}{18}$. D. $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$.

Biết rằng $I=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)dx=\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-3b$.

A. $T=6123$. B. $T=12279$.

C. $T=6125$. D. $T=12273$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\frac{f^2(x)}{\sqrt{(2x+1)^3}}=(f'(x))^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f(0)=f'(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. e^2. B. $2e$.

C. e^3. D. e^2+1.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1;0]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(3x^2+2x)e^{-f(x)}, \forall x\in[-1;0]$. Tính $P=f(0)-f(-1)$.

A. $P=-1$. B. $P=\frac{1}{e}$.

C. $P=1$. D. $P=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+6f(2x)=\sqrt{4-x^2}$. Tính tích phân $\int_0^4 f(x)dx$.

A. $I=\frac{\pi}{5}$. B. $I=\frac{\pi}{2}$.

C. $I=\frac{\pi}{20}$. D. $I=\frac{\pi}{10}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

A. 10. B. 8.

C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 16. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp n trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1-x)+x^2f''(x)=2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I=-1$. B. $I=1$.

C. $I=\frac{1}{3}$. D. $I=-\frac{1}{3}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1$ và $\int_0^1 f^2(x)dx=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng:

A. 1. B. 8.

C. 10. D. 80.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx=1$ và $\int_0^1 f^2(x)dx=5$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng:

A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{6}{5}$.

C. 8. D. 10.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. 1. B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{7}{4}$. D. 4.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=e.f(0)$ và $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2dx\le 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1)=\sqrt{\dfrac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\dfrac{2(e-2)}{e-1}$.

C. $f(1)=\sqrt{\dfrac{2e^2}{e^2-1}}$. **D.** $f(1)=\sqrt{\dfrac{2(e-2)}{e-1}}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int\limits_0^1\left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx\le 3\int\limits_0^1 f'(x).f^2(x)dx$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=2\left(\sqrt{e}-1\right)$. **B.** $I=2\left(e^2-1\right)$.

C. $I=\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{2}$.

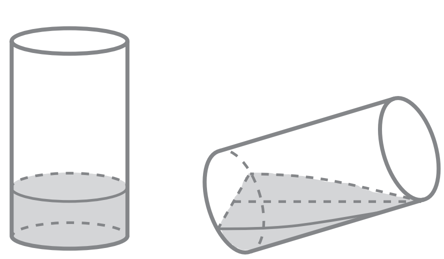
Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1\sqrt{\dfrac{x.f'(x)}{f(x)}}dx\ge 1$ và $f(0)=1$; $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. **B.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$.

C. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e$.

* Một số dạng khác

Câu 23. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 240 cm^3. **B.** 240π cm^3.

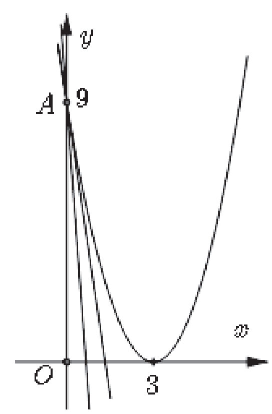
C. 120 cm^3. **D.** 120π cm^3.

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ bằng?

A. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi-1}{2}$.

C. $\dfrac{\pi}{2}-1$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}-1$.

Câu 25. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=(x-3)^2$, trục hoành và trục tung. Gọi k_1,k_2 $(k_1>k_2)$ lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (*tham khảo hình vẽ bên dưới*).



Giá trị của k_1-k_2 bằng

A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** 7.

C. $\dfrac{25}{4}$. **D.** $\dfrac{27}{4}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn hai điều kiện $f^2(x)+3x^2+2x-1\le 4x.f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^3 f(x)dx=12$. Giá trị $\int\limits_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** 6.

C. 7. **D.** 8.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1A	2A	3D	4D	5B
6A	7A	8B	9D	10C
11D	12A	13D	14A	15B
16A	17C	18A	19B	20C
21A	22C	23A	24A	25D
26A				

Câu 1. Chọn A.

Từ giả thiết, ta có: $\cos x.f(x)+\sin x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow [\sin x.f(x)]'=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\int [\sin x.f(x)]'dx=\int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow \sin x.f(x)=x.\tan x+\ln|\cos x|+C$.

- Với $x=\dfrac{\pi}{3}$, ta có: $\sin\dfrac{\pi}{3}.f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}.\tan\dfrac{\pi}{3}+\ln\left|\cos\dfrac{\pi}{3}\right|+C$

$\Rightarrow \sqrt{3}.f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}.\pi\sqrt{3}-2\ln 2+2C$.

- Với $x=\dfrac{\pi}{6}$, ta có: $\sin\dfrac{\pi}{6}.f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}.\tan\dfrac{\pi}{6}+\ln\left|\cos\dfrac{\pi}{6}\right|+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{9}.\pi\sqrt{3}+\ln 3-2\ln 2+2C$.

Do đó $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{9}\pi\sqrt{3}-\ln 3$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{9} \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow P=a+b=-\dfrac{4}{9}$.

Câu 2. Chọn A.

Nhân cả hai vế với e^x ta được:

$e^x f(x)+e^x f'(x)=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow [e^x f(x)]'=\sqrt{2x+1}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\int [e^x f(x)]'dx=\int \sqrt{2x+1}dx \Rightarrow e^x f(x)=\dfrac{2x+1}{3}\sqrt{2x+1}+C$

Vậy $e^4 f(4)-f(0)=\dfrac{26}{3}$.

Câu 3. Chọn D.

Nhân cả hai vế với e^{-x} ta được:

$e^{-x}.f'(x)-e^{-x}.f(x)=e^{-x}(x^2.e^x+1)$

$\Leftrightarrow \left[e^{-x}.f(x)\right]'=x^2+e^{-x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\int \left[e^{-x}.f(x)\right]'dx=\int (x^2+e^{-x})dx \Rightarrow e^{-x}.f(x)=\dfrac{x^3}{3}-e^{-x}+C$

Do $f(1)=-1$, nên ta có:

$e^{-1}.f(1)=\dfrac{1^3}{3}-e^{-1}+C \Rightarrow C=-\dfrac{1}{3}$.

Suy ra: $f(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3}\right)e^x-1$.

Vậy $f(3)=\left(\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{1}{3}\right)e^3-1=\dfrac{26}{3}e^3-1$.

Câu 4. Chọn D.

Nhân cả hai vế với e^{-2018x}, ta được:

$f'(x).e^{-2018x}-2018f(x).e^{-2018x}=2018x^{2017}$

$\Leftrightarrow [f(x).e^{-2018x}]'=2018x^{2017}$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\int [f(x).e^{-2018x}]'dx=\int 2018x^{2017}dx$

$\Rightarrow f(x).e^{-2018x}=x^{2018}+C$

Do $f(0)=2018$, nên ta có

$f(0).e^{-2018.0}=0^{2018}+C \Leftrightarrow C=2018$.

Suy ra: $f(x)=(x^{2018}+2018)e^{2018x}$.

Vậy $f(1)=2019e^{2018}$.

Câu 5. Chọn B.

Giải thiết tương đương với: $\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\int \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}dx=\int (2x+3)dx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+C}$

$\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{4+C}$.

Mà $f(1)=\dfrac{1}{6}$, nên ta có $\dfrac{1}{4+C}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow C=2$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

$P=1+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)$

$=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}$

$=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{6055}{4038}$.

Câu 6. Chọn A.

Giả thiết tương đương với: $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=e^x$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\int_0^{\ln 2} -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int_0^{\ln 2} e^x dx \Leftrightarrow \left.\dfrac{1}{f(x)}\right|_0^{\ln 2}=\left.e^x\right|_0^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(\ln 2)}-\dfrac{1}{f(0)}=1 \Leftrightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $f'(\ln 2)=-e^{\ln 2}.f^2(\ln 2)=-2.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{-2}{9}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y=-\frac{2}{9}(x-\ln 2)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x+9y-2\ln 2-3=0$.

Câu 7. Chọn A.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=-\frac{2-\pi}{2}$.

Do đó giả thiết tương đương với

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x).\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2dx=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Suy ra $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=0$.

Câu 8. Chọn B.

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần ta tính được

$\int_0^1\ln^2(x+1)\,dx=2\ln^2\frac{2}{e}=\int_0^1 2\ln^2\frac{2}{e}dx$.

Do đó giả thiết tương đương với:

$\int_0^1[f(x)-\ln(x+1)]^2dx=0\Leftrightarrow f(x)=\ln(x+1),\forall x\in[0;1]$

Suy ra: $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\ln(x+1)dx=\ln\frac{4}{e}$.

Câu 9. Chọn D.

Giả thiết tương đương với $\int_0^1[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1]dx=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{f'(x)}.f(x)=1,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=1$

$\Rightarrow\int f'(x).f^2(x)dx=\int dx$

hay $\int f^2(x)d(f(x))=\int dx\Rightarrow\frac{f^3(x)}{3}=x+C$.

Do $f(0)=2$, nên ta có: $\frac{f^3(0)}{3}=0+C\Leftrightarrow C=\frac{8}{3}$.

Vậy $f^3(x)=3x+8\Rightarrow I=\int_0^1 f^3(x)dx=\frac{19}{2}$.

Câu 10. Chọn C.

Giả thiết tương đương với:

$$\int_0^1[f'(x)f^2(x)+f'(x)]dx-2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2dx+\underbrace{\int_0^1[f'(x)-1]dx}_{=0\text{ vì }f(1)-f(0)=1}=0$$

$\sqrt{f'(x)}.f(x)=1,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow f'(x)f^2(x)=1$

$\Rightarrow\int f'(x)f^2(x)dx=\int dx$

hay $\int f^2(x)d(f(x))=\int dx$

$\Rightarrow\frac{f^3(x)}{3}=x+C\Rightarrow f^3(x)=3x+3C$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3x+3C}$.

Do $f(1)-f(0)=1$, nên ta có:

$\sqrt[3]{3.1+3C}-\sqrt[3]{3.0+3C}=1$

$\Leftrightarrow C=\frac{5\sqrt{33}-27}{54}$.

Vậy $f^3(x)=3x+\frac{5\sqrt{33}-27}{18}\Rightarrow\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=\frac{5\sqrt{33}}{18}$.

Câu 11. Chọn D.

Ta có: $3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$

$\Leftrightarrow(f^3(x))'e^{f^3(x)}-e^{f^3(x)}=(4x+1).e^{2x^2+x+1}-e^{2x^2+x+1}$

$\Rightarrow[f^3(x)-x]'.e^{f^3(x)-x}=(2x^2+1)'.e^{2x^2+1}$

$\Rightarrow e^{f^3(x)-x}=e^{2x^2+1}+C$

Mà $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f^3(x)-x=2x^2+1$

$\Rightarrow f^3(x)=2x^2+x+1\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{2x^2+x+1}$

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)dx=\frac{12285}{4}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=12285\\b=4\end{cases}\Rightarrow T=a-3b=12273$

Câu 12. Chọn A.

Ta có: $f''(x).f(x)+\frac{f^2(x)}{\sqrt{(2x+1)^3}}=(f'(x))^2$

$\Leftrightarrow f''(x).f(x)-(f'(x))^2=-\frac{f^2(x)}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f''(x).f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\int \dfrac{dx}{\sqrt{(2x+1)^3}} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\int (2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} + C_1$.

Thay $x=0$ ta được: $C_1 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$\Leftrightarrow \ln(f(x)) = \sqrt{2x+1} + C_2$.

Thay $x=0$ ta được:

$C_2 = -1 \Rightarrow \ln(f(x)) = \sqrt{2x+1} - 1$.

Thay $x=4$ ta được $\ln(f(4)) = 2 \Rightarrow f(4) = e^2$.

Câu 13. Chọn D.

Ta có: $f'(x) = (3x^2+2x)e^{-f(x)}, \forall x \in [-1;0]$

$\Leftrightarrow f'(x).e^{f(x)} = 3x^2+2x$, $\forall x \in [-1;0]$ (*).

Lấy nguyên hàm hai vế của (*) ta được:

$\int e^{f(x)}d(f(x)) = x^3 + x^2 + C$

$\Rightarrow e^{f(x)} = x^3 + x + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln\left|x^3+x+C_1\right|$.

Do đó $\begin{cases} f(0) = \ln|C_1| \\ f(-1) = \ln|C_1| \end{cases} \Rightarrow f(0) - f(-1) = 0$.

Vậy $P = 0$.

Câu 14. Chọn A.

Ta có: $4xf(x^2) + 6f(2x) = \sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow \int\limits_0^2 [4xf(x^2)+6f(2x)]dx = \int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$\Leftrightarrow 4I_1 + 6I_2 = I$.

Trong đó:

$I_1 = \int\limits_0^2 xf(x^2)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x^2)d(x^2) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)dx$.

$I_2 = \int\limits_0^2 f(2x)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(2x)d(2x) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)dx$.

$I = \int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2(t)}\cos(t)dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt$

$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))dt = [2t+\sin(2t)]\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$.

Khi đó ta có hệ

$\begin{cases} I_1 = I_2 \\ 4I_1 + 6I_2 = \pi \end{cases} \Leftrightarrow I_1 = I_2 = \dfrac{\pi}{10} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)dx = \dfrac{\pi}{10}$

hay $\int\limits_0^4 f(x)dx = \dfrac{\pi}{5}$.

Câu 15. Chọn B.

Ta có:

$(f(x).f'(x))' = (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + C, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lại có $f(0) = f'(0) = 1$ nên $C = 1$ do đó

$f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$(f^2(x))' = 2f(x).f'(x) = 6x^5 + 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mà $f(0) = 1$ nên $C_1 = 1$.

Vậy $f^2(1) = 1^6 + 4.1^3 + 2.1 + 1 = 8$.

Câu 16. Chọn A.

Thay $x=0$ vào $f(1-x) + x^2f''(x) = 2x$ ta được: $f(1) = 0$.

$f(1-x) + x^2f''(x) = 2x$

$\Rightarrow -f'(1-x) + 2xf''(x) + x^2f'''(x) = 2$.

Khi đó $f'(1) = -2$.

Ta có $f(1-x) + x^2f''(x) = 2x$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f(1-x) + x^2f''(x)\right]dx = \int\limits_0^1 2xdx$

$\Rightarrow -\int\limits_0^1 f(1-x)d(1-x) + f'(1) - \int\limits_0^1 xf'(x)dx = 1$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx - 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx = 3$.

Đặt $J = \int\limits_0^1 f(x)dx$, ta có:

$I = \int\limits_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)dx = f(1) - \int\limits_0^1 f(x)dx = -J$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} J-2I=3 \\ I=-J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I=-1 \\ J=1 \end{cases}$.

Vậy $I=\int_0^1 xf'(x)dx=-1$.

Câu 17. Chọn C.

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $f^2(x);\ xf(x);\ f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f(x)+\alpha x+\beta]^2$.

Với mỗi số thực α,β ta có

$$\int_0^1 [f(x)+\alpha x+\beta]^2 dx$$

$$=\int_0^1 f^2(x)dx+2\int_0^1(\alpha x+\beta)f(x)dx+\int_0^1(\alpha x+\beta)^2dx$$

$$=4+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\alpha\beta+\beta^2.$$

Ta cần tìm α,β sao cho $\int_0^1[f(x)+\alpha x+\beta]^2dx=0$

hay $4+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\alpha\beta+\beta^2=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+(3\beta+6)\alpha+3\beta^2+6\beta+12=0$.

Để tồn tại α thì $\Delta=(3\beta+6)^2-4(3\beta^2+6\beta+12)\ge 0$

$\Leftrightarrow -3\beta^2+12\beta-12\ge 0 \Leftrightarrow -3(\beta-2)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow \beta=2 \Rightarrow \alpha=-6$.

Vậy

$$\int_0^1[f(x)-6x+2]^2dx=0 \Leftrightarrow f(x)=6x-2, \forall x\in[0;1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^3(x)dx=10.$$

Câu 18. Chọn A.

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $f^2(x);\ xf(x);\ \sqrt{x}f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2$.

Với mỗi số thực α,β ta có: $\int_0^1\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2dx$

$$=\int_0^1 f^2(x)dx+2\int_0^1\left(\alpha x+\beta\sqrt{x}\right)f(x)dx+\int_0^1\left(\alpha x+\beta\sqrt{x}\right)^2dx$$

$$=5+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha\beta}{5}+\frac{\beta^2}{2}.$$

Ta cần tìm α,β sao cho $\int_0^1\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2dx=0$

hay $5+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha\beta}{5}+\frac{\beta^2}{2}=0$.

Tương tự như bài trước, ta tìm được $\begin{cases}\alpha=-15 \\ \beta=10\end{cases}$.

Vậy $\int_0^1\left[f(x)-15x+10\sqrt{x}\right]^2dx=0$

$\Leftrightarrow f(x)=15x-10\sqrt{x}, \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow \int_0^1 f^3(x)dx=\frac{5}{6}$.

Câu 19. Chọn B.

Cách 1: Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2;\ x^2f(x)$ không có mối liên hệ với nhau.

Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)dx.$$

Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra

$\int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1$.

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases}\int_0^1[f'(x)]^2dx=7 \\ \int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1\end{cases}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2;\ x^3.f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x)+\alpha x^3]^2$.

Với mỗi số thực α ta có

$$\int_0^1\left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2dx$$

$$=\int_0^1[f'(x)]^2dx+2\alpha\int_0^1 x^3.f'(x)dx+\alpha^2\int_0^1 x^6dx$$

$$=7-2\alpha+\frac{\alpha^2}{7}=\frac{1}{7}(\alpha-7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1[f'(x)+\alpha x^3]^2dx=0$ hay

$\frac{1}{7}(\alpha-7)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=7$.

Vậy $\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2dx=0 \Leftrightarrow f'(x)=-7x^3, \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$.

Do $f(1)=0$, nên ta có: $f(0)=-\frac{7}{4}.0^4+C \Leftrightarrow C=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{5}$.

Cách 2: Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx.$$

Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra

$$\int_0^1 x^3.f'(x)dx = -1.$$

Theo Holder

$$(-1)^2 = \left(\int_0^1 x^3.f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^6 dx.\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{x^7}{7}\Big|_0^1.7 = 1$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)=kx^3$, thay vào

$\int_0^1 x^3.f'(x)dx = -1$ ta được $k=-7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3$ (làm tiếp như trên).

Câu 20. Chọn C.

Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + [f'(x)]^2\right]dx \overset{AM-GM}{\ge} 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$

$$= 2\ln|f(x)|\Big|_0^1 = 2\ln|f(1)| - 2\ln|f(0)|$$

$$= 2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right| = 2\ln e = 2.$$

Mà $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \le 2$ nên dấu "=" xảy ra,

tức là $f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x).f'(x) = 1$

$$\Rightarrow \int f(x).f'(x)dx = \int xdx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}.$$

Theo giả thiết $f(1) = e.f(0)$ nên ta có

$$\sqrt{2+2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2+2C = e^2.2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^2-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}}$$

$$\Rightarrow f(1) = \sqrt{2+\frac{2}{e^2-1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$$

Câu 21. Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$f^3(x) + 4[f'(x)]^3$$

$$= 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2} \ge 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3.\frac{f^3(x)}{2}.\frac{f^3(x)}{2}}$$

$$= 3f'(x).f^2(x).$$

Suy ra $\int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right]dx \ge 3\int_0^1 f'(x).f^2(x)dx$.

Mà $\int_0^1 \{f^3(x) + 4[f'(x)]^3\}dx \le 3\int_0^1 f'(x).f^2(x)dx$

nên dấu "=" xảy ra, tức là

$$4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\int dx$$

$$\Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x+C}.$$

Theo giả thiết $f(0)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2(\sqrt{e}-1).$$

Câu 22. Chọn C.

Hàm dưới dấu tích phân là

$$\sqrt{\frac{x.f'(x)}{f(x)}} = \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}, \forall x \in [0;1].$$

Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \ge 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{x.f'(x)}{f(x)}}$ với $m \ge 0$ và $x \in [0;1]$

Do đó ta cần tìm tham số $m \ge 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx\right]dx \ge 2\sqrt{m}.\int_0^1 \sqrt{\frac{x.f'(x)}{f(x)}}dx.$$

Hay $\ln|f(x)|\Big|_0^1 + \frac{mx^2}{2}\Big|_0^1 \ge 2\sqrt{m}.1$

$$\Leftrightarrow \ln|f(1)| - \ln|f(0)| + \frac{m}{2} \ge 2\sqrt{m}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 0 + \frac{m}{2} \ge 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có

$2-0+\frac{m}{2}=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=4$.

Với $m=4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{f'(x)}{f(x)}=4x$.

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 4xdx$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)|=2x^2+C\Rightarrow f(x)=e^{2x^2+C}$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=e^2 \end{cases}\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow f(x)=e^{2x^2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Cách khác: Theo Holder

$1^2\le\left(\int_0^1\sqrt{\frac{x.f'(x)}{f(x)}}dx\right)^2$

$=\left(\int_0^1\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx\right)^2\le\int_0^1 xdx.\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

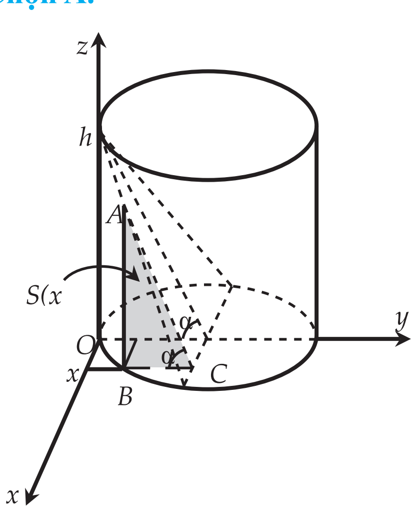
$=\frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)}=1$.

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=kx$, thay vào

$\int_0^1\sqrt{\frac{x.f'(x)}{f(x)}}dx=1$ ta được $k=4$.

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)}=4x$ (làm tiếp như trên).

Câu 23. Chọn A.



Đặt $R=6\,(\text{cm})$, $h=10\,(\text{cm})$.

Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x ($-6\le x\le 6$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có $S(x)=S_{\Delta ABC}$

$=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{2}BC^2\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\frac{h}{R}$

$=\frac{5(36-x^2)}{6}$.

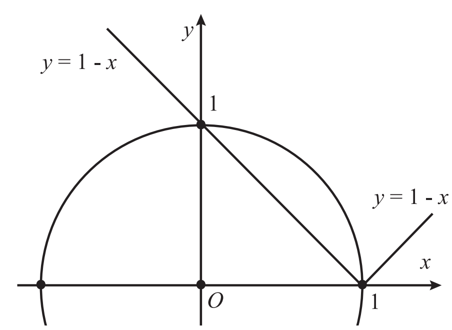
Vậy thể tích lượng nước trong cốc là:

$V=\int_{-6}^{6}S(x)dx=\int_{-6}^{6}\frac{5(36-x^2)}{6}dx=240\,(\text{cm}^3)$.

Câu 24. Chọn A.

Ta có: $y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ 1-x & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

$x^2+y^2=1\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ (vì chỉ lấy phần nửa trên của đường tròn).



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

Diện tích hình phẳng trên là:

$S=\int_0^1\left[\sqrt{1-x^2}-(1-x)\right]dx$

$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1(x-1)\,dx=I_1-\frac{1}{2}$.

Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Đặt $x=\sin t$ (với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$) $\Rightarrow dx=\cos t dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$

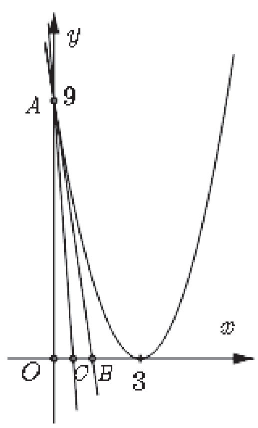
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Câu 25. Chọn D.

Ta có diện tích của hình phẳng (H) là $S=\int_0^3(x-3)^2dx=9$.



Gọi $(d_1),(d_2)$ lần lượt là hai đường thẳng có hệ số góc k_1,k_2 và cùng đi qua điểm $A(0;9)$.

Khi đó phương trình đường thẳng (d_1) là: $y=k_1(x-0)+9=k_1x+9$ và phương trình đường thẳng (d_2) là: $y=k_2(x-0)+9=k_2x+9$.

Đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt cắt trục Ox tại $B\left(-\frac{9}{k_1};0\right)$ và $C\left(-\frac{9}{k_2};0\right)$ (vì $k_2<k_1<0$).

Theo giả thiết thì

$$\begin{cases}S_{\Delta AOC}=\frac{1}{3}S\\ S_{\Delta AOB}=\frac{2}{3}S\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}9.\left|-\frac{9}{k_2}\right|=3\\ \frac{1}{2}9.\left|-\frac{9}{k_1}\right|=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_2=-\frac{27}{2}\\ k_1=-\frac{27}{4}\end{cases}.$$

Suy ra $k_1-k_2=-\frac{27}{4}+\frac{27}{2}=\frac{27}{4}$.

Câu 26. Chọn A.

Ta có: $f^2(x)+3x^2+2x-1\le 4x.f(x)$

$\Leftrightarrow[f(x)-(x+1)][f(x)-(3x-1)]\le 0$ (1).

$*$ Nếu $x\ge 1$ thì (1) $\Leftrightarrow x+1\le f(x)\le 3x-1$

$\Rightarrow\int_1^3(x+1)dx\le\int_1^3 f(x)dx\le\int_1^3(3x-1)dx$

$\Leftrightarrow 6\le\int_1^3 f(x)dx\le 10$ (2).

$*$ Nếu $x\le 1$ thì (1) $\Leftrightarrow 3x-1\le f(x)\le x+1$

$\Rightarrow\int_{-1}^1(3x-1)dx\le\int_{-1}^1 f(x)dx\le\int_{-1}^1(x+1)dx$

$\Leftrightarrow -2\le\int_{-1}^1 f(x)dx\le 2$ (3).

Từ (2), (3) suy ra: $\Rightarrow 4\le\int_{-1}^3 f(x)dx\le 12$.

Do $\int_{-1}^3 f(x)dx=12\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x-1 \text{ khi } x\ge 1\\ x+1 \text{ khi } x\le 1\end{cases}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=5$.