CHỦ ĐỀ 8

CASIO GIẢI NHANH CHƯƠNG HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

A KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Casio tìm Min Max: Dùng lệnh Mode 7 của máy tính Casio để tính nhanh đáp số mà không cần biết cách làm

Phương pháp: Gồm 2 bước

Bước 1 : Để tìm GTLN - GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên miền $[a;b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị) Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp)

Bước 2 : Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min.

2. Casio tìm khoảng đồng biến nghịch biến: Dùng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 . Quan sát bảng kết quả nhận được, khoảng nào làm cho hàm số luôn tăng thì là khoảng đồng biến, khoảng nào làm cho hàm số luôn giảm là khoảng nghịch biến.

Chú ý : Trong bài toán chứa tham số ta tính đạo hàm rồi tiến hành cô lập m và đưa về dạng $m \geq f(x)$ hoặc $m \leq f(x)$. Tìm Min, Max của hàm $f(x)$ rồi kết luận.

3. Casio tìm điểm cực trị hàm số: Dùng lệnh để kiểm tra cực trị. Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 và nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

4. Casio tìm giới hạn : Dùng chức năng CALC với một số quy ước

$x \to +\infty \Rightarrow x = 10^9$

$x \to -\infty \Rightarrow x = -10^9$

$x \to x_0^+ \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$

$x \to x_0^- \Rightarrow x = x_o - 10^{-6}$

$x \to x_0 \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$

5. Casio tìm sự tương giao: Ta tiến hành cô lập m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x)=m$ (2) khi đó số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Chú ý : Đường thẳng $y=m$ có tính chất song song với trục hoành và đi qua điểm có tọa độ $(0;m)$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Thi thử Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh – Lần 1 – 2017)

Hàm số $y=\left|3\cos x-4\sin x+8\right|$ với $x\in[0;2\pi]$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số . Khi đó tổng $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $7\sqrt{3}$ **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** 16

Giải

Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 0 End 2π Step $\dfrac{2\pi-0}{19}$

[MODE] [7] [SHIFT] [hyp] [3] [cos] [ALPHA] [)] [)]

[−] [4] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [8] [=]

[=] [0] [=] [2] [SHIFT] [x10ˣ] [=] [2] [SHIFT] [x10ˣ] [÷] [1] [9] [=]

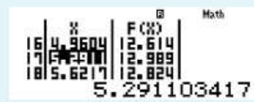
Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(5.2911)=12.989\approx 13=M$

Ta thấy giá trị nhỏ nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(2.314)=3.0252\approx 3=m$

Vậy $M+m\approx 16\Rightarrow$ **Chọn D**

Chú ý

Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Radian



Ví dụ 2 (KSCL Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – 2017)

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2;3]$ là $-\dfrac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng

A. -5 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -2

Giải

Ta hiểu nếu giá trị nhỏ nhất của $y=-\dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[2;3]$ có nghĩa là phương trình $y+\dfrac{1}{3}=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$

Thử nghiệm đáp án A với $m=-5$ ta thiết lập $\dfrac{-10x+1}{-5-x}+\dfrac{1}{3}=0$.

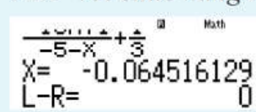
Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

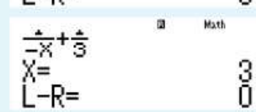
[▭] [−] [1] [0] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [−] [5] [−] [ALPHA] [)]

[▶] [+] [▭] [1] [▼] [3] [SHIFT] [CALC] [2] [.] [5] [=]

Chú ý

Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 với chức năng MODE 7





Ta thấy khi $y=\dfrac{1}{3}$ thì $x=-0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$

Vậy đáp án A sai

Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m=0$ khi đó y có dạng $\dfrac{1}{-x}$

[▭] [1] [▼] [−] [ALPHA] [)] [▶] [+] [▭] [1] [▼] [3] [SHIFT] [CALC] [2] [.] [5] [=]

Ta thấy khi $y=\dfrac{1}{3}$ khi $x=3$ là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ $\Rightarrow$ **Chọn C**

Ví dụ 3 **(Thi thử chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2017)**

Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành 2 phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{40}{9+4\sqrt{3}}m$ **B.** $\dfrac{180}{9+4\sqrt{3}}m$ **C.** $\dfrac{120}{9+4\sqrt{3}}m$ **D.** $\dfrac{60}{9+4\sqrt{3}}m$

Giải

Gọi hai đầu đoạn dây là M,N và điểm I chia đoạn MN thành 2 phần. Đặt $x=MI$ và uốn đoạn này thành tam giác đều IEM cạnh $\dfrac{x}{3}$

$\Rightarrow S_{IEM}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2$

Đoạn còn lại IN uốn thành hình vuông $IPQN$ cạnh $\dfrac{20-x}{4}$

$\Rightarrow S_{IPQN}=\left(\dfrac{20-x}{4}\right)^2$

Đặt tổng diện tích $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{20-x}{4}\right)^2$

Ta sử dụng MODE 7 với Start 0 End 20 Step 20/19 để dò GTNN

MODE 7 ■ √■ 3 ▼ 4 ▶ (■ ALPHA) ▼ 3 ▶) x² + (■ 2 0 − ALPHA) ▼ 4 ▶) x² = = 0 = 2 0 = 2 0 ÷ 1 9 =

Giá trị nhỏ nhất xuất hiện là ≈ 10.88 đạt được khi $x\approx 11.57\approx \dfrac{180}{9+4\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow$ **Chọn B**

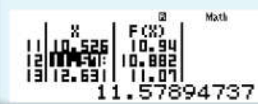
Chú ý

Để làm bài toán cực trị dạng thực tế này ta thường làm theo 2 bước :

Bước 1 : Đặt đại lượng đề bài yêu cầu tìm là x

Bước 2 : Dựa vào đề bài thiết lập hàm số tìm GTLN-GTNN

Bước 3 : Sử dụng thủ thuật Casio tìm nhanh GTLN-GTNN



Ví dụ 4 **(Chuyên KHTN - 2017)**

Cho các số x,y thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$ Tìm giá trị lớn nhất : $P=\dfrac{2\left(x^2+6xy\right)}{1+2xy+2y^2}$.

A. 11 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 3

Giải

Nếu thế $x^2+y^2=1$ ta được : $P=\dfrac{2\left(x^2+6xy\right)}{x^2+2xy+3y^2}$

Nếu $y=0\Rightarrow P=2$. Nếu $y\neq 0$ ta đặt $t=\dfrac{x}{y}$ khi đó

$P=f(t)=\dfrac{2\left(t^2+6t\right)}{t^2+2t+3}$

Dùng lệnh MODE 7 với Start -4 End 5 Step 0.5 ta được

MODE 7 ■ 2 (ALPHA) x² + 6 ALPHA)) ▼ ALPHA) x² + 2 ALPHA) + 3 = = − 4 = 5 = 0 . 5 =

Ta thấy GTLN xuất hiện là 3 khi $x=3$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Chú ý

Ngoài cách dùng MODE 7 ta có thể dùng lệnh dò nghiệm SHIFT SOLVE.

*Nếu đáp án **A** đúng thì phương* trình $P=0\Leftrightarrow=\dfrac{2\left(t^2+6t\right)}{t^2+2t+3}=0$ có nghiệm

Ví dụ 5

(Thi thử Báo Toán Học Tuổi Trẻ - Lần 4 - 2017)

Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là

A. $m \le 1$ **B.** $m \ge 3$ **C.** $1 \le m \le 3$ **D.** $m < 3$

Giải

Để giải các bài toán liên quan đến tham số m thì ta phải cô lập m

Hàm số đồng biến

$\Leftrightarrow y' \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3x^3 - 6x = f(x)$

Vậy để hàm số y đồng biến trên tập xác định thì $m \ge f(x)$ hay $m \ge f(\max)$ với mọi x thuộc R

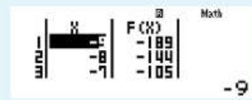
Để tìm Giá trị lớn nhất của $f(x)$ ta vẫn dùng chức năng MODE 7 nhưng theo cách dùng của kỹ thuật Casio tìm min max

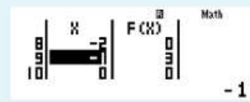
MODE 7 − 3 ALPHA) x^2 − 6 ALPHA) = = − 9

= 1 0 = 1 =

Bình luận

Kiến thức (*) áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2 : "Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\Delta \le 0$ thì dấu của tam thức bậc 2 luôn cùng dấu với a".





Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 3 khi $x = -1$

Vậy $m \ge 3$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Ví dụ 6

(Thi thử Báo Toán Học Tuổi Trẻ - Lần 3 - 2017)

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \sin x - \cos x + 2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên R ?

A. $m \ge 2017$ **B.** $m < 0$ **C.** $m \ge \frac{1}{2017}$ **D.** $m \ge -\frac{1}{2017}$

Giải

Tính đạo hàm $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$

$$y' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{-\sin x - \cos x}{2017\sqrt{2}} = f(x)$$

Để hàm số luôn đồng biến trên R thì $m \ge f(x)$ đúng với mọi $x \in R$ hay $m \ge f(\max)$

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số ta lại sử dụng chức năng MODE 7. Vì hàm $f(x)$ là hàm lượng giác mà hàm lượng giác $\sin x, \cos x$ thì tuần hoàn với chu kì 2π vậy ta sẽ thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi}{19}$

SHIFT MODE 4 MODE 7 $\frac{\square}{\square}$ − sin ALPHA)) − cos ALPHA

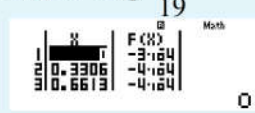
)) ▼ 2 0 1 7 √■ 2 = = 0 = 2 SHIFT

$\times 10^x$ = 2 SHIFT $\times 10^x$ ÷ 1 9 =

Bình luận

Vì chu kì của hàm $\sin x, \cos x$ *là* 2π nên ngoài thiết lập Start 0 End 2π *thì ta có thể thiết lập Start* $-\pi$ *End* $-\pi$

Nếu chỉ xuất hiện hàm $\tan x, \cot x$ mà hai hàm này tuần hoàn theo chu *kì* π *thì ta có thể thiết lập Start 0 End* π *Step* $\frac{\pi}{19}$



Quan sát bảng giá trị của $F(X)$ ta thấy $f(\max) = f(3.9683) \approx 5.10^{-4}$

Đây là 1 giá trị $\approx \frac{1}{2017}$ vậy $m \ge \frac{1}{2017}$ $\Rightarrow$ **Chọn C**

Ví dụ 7

(Thi thử Chuyên KHTN –HN - Lần 2 - 2017)

Cho hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ **B.** Hàm số đat cực tiểu tại $x=2$

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ **D.** Hàm số không có cực tiểu

Giải

Để kiểm tra đáp án A ta tính đạo hàm của y tại $x=1$ (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)

◀ DEL 1 =

Ta thấy đạo hàm $y'(1)\neq 0$ vậy đáp số A sai

Tương tự với đáp án B (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)

◀ ◀ DEL 2 =

Ta thấy $y'(2)=0$. Đây là điều kiện cần để $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số y

Kiểm tra $y'(2-0.1)=-0.1345...<0$

◀ ◀ − 0 . 1 =

Kiểm tra $y'(2+0.1)=0.1301...>0$

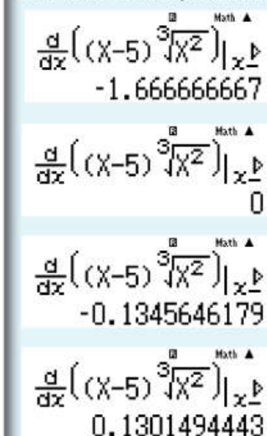
◀ ◀ DEL DEL DEL DEL + 0 . 1 =

Tóm lại $f'(2)=0$ và dấu của y' đổi từ $-$ sang $+$ vậy hàm số y đạt cực tiểu tại $x=2$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Bình luận

Trong các bài toán tính đạo hàm phức tạp thì cách Casio càng tỏ ra có hiệu quả vì tránh được nhầm lẫn khi tính đạo hàm và xét dấu của đạo hàm.



Ví dụ 8

(KSCL Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – 2017)

Tìm tất các các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-3m^2+5$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=0$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Ví dụ 9

(Thi thử THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1 - 2017)

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{x+4}-2}$ bằng

A. 1 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 4

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Ví dụ 10

(Thi thử Chuyên Amsterdam - Lần 1 - 2017)

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ bằng

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** $+\infty$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Ví dụ 11 Tính giới hạn : $\lim \dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Ví dụ 12 Kết quả giới hạn $\lim \dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ là :

A. $-\dfrac{25}{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** 1 **D.** $-\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Ví dụ 13 Tính giới hạn : $\lim \left(1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Ví dụ 14 **(Thi thử Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang – Lần 1 – 2017)**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3+mx+16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

A. $m>12$ **B.** $m<-12$ **C.** $m<0$ **D.** Không có m thỏa mãn

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Ví dụ 15 **(Thi thử Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang – Lần 1 – 2017)**

Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Biết đường thẳng $y=-4x+3$ tiếp xúc với (C) tại điểm A và cắt (C) tại điểm B. Tìm tung độ của điểm B.

A. 1 **B.** 15 **C.** -3 **D.** -1

$\Rightarrow$ **Chọn B**