



Hàm số Lượng Giác Và Phương Trình Lượng Giác

A. Hàm số lượng giác:

I. Lý thuyết:

1. **Hàm số:** $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$

2. **Tính chất:**

- Tập xác định, tập giá trị, tính chẵn – lẻ, tuần hoàn, sự biến thiên và đồ thị.

3. **Hàm tuần hoàn:**

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D được gọi là hàm tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho $\forall x \in D$ ta có:

$$x + T \in D; x - T \in D \text{ và } f(x + T) = f(x).$$

- Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kỳ của hàm f.

II. Bài tập:

1. Tìm tập xác định của các hàm số:

1. $y = \cos \sqrt{x}$	2. $y = \cos \frac{x+1}{x}$	3. $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	4. $y = \sqrt{\frac{2+\cos x}{1+\sin x}}$
5. $y = \frac{1+2\cos x}{\sin x}$	6. $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$	7. $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	8. $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$
9. $y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}}$	10. $y = \cos \frac{2-x}{x-1}$	11. $y = \sin \frac{2-x}{x^2-1}$	
12. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	13. $y = \frac{5+x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$	14. $y = \tan x + \cot x$	

2. Tìm tập xác định của các hàm số:

1. $y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$	2. $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$	3. $y = \tan(x + 2)$	4. $y = \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$
5. $y = \sqrt{\sin x + 1} - \cos 5x$	6. $y = \frac{1}{\sin x - 1} + \tan x$	7. $y = \frac{\cos x + 1}{\cos 2x \cdot \sin 4x}$	
8. $y = \frac{1}{\sqrt{ \sin x }}$	9. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$	10. $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$	

3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số.

1. $y = x \cos 3x$	2. $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$	3. $y = x^3 \sin 2x$	4. $y = \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$
5. $y = \frac{\cos 2x}{x}$	6. $y = x - \sin x$	7. $y = \sqrt{1-\cos x}$	8. $y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$
9. $y = \cos x + \sin^2 x$	10. $y = \sin 2x + \cos 2x$	11. $y = \cot 2x + 5 \sin x$	12. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

1. $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$	2. $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$	3. $y = 2 \sin x + 1$	4. $y = 3 \cos x - 1$
---	--------------------------------	-----------------------	-----------------------



5. $y = 4\cos^2 x - 4\cos x + 2$ 6. $y = \sin x + \cos x + 2$ 7. $y = 4\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x + \cos x$
8. $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$ 9. $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 10. $y = 2\sqrt{1 + \cos x} - 3$ 11. $y = 2 + 3\cos x$
12. $y = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x$ 13. $y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{3}$ 14. $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$ 15. $y = 3 - 2|\sin x|$
16. $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 17. $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$ 18. $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}$
19. $y = 3 + \frac{1}{4}\sin x \cos x$ 20. $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

B. Phương trình lượng giác:

I. Lý thuyết:

1. Dạng cơ bản:

1.1. Phương trình: $\sin x = \alpha$

Cách giải: SGK

1.2. Phương trình: $\cos x = \alpha$

Cách giải: SGK

1.3. Phương trình: $\tan x = \alpha$ đk: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Cách giải: SGK

1.4. Phương trình: $\cot x = \alpha$ đk: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Cách giải: SGK

1.5. Chú ý:

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ | 2. $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ |
| 3. $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | 4. $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ |

2. Dạng thường gặp:

2.1. Phương trình bậc hai đối với một HSLG:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ | 2. $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ |
| 3. $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ | 4. $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$ |

Cách giải:

đặt $t = \sin x / \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$) hoặc $t = \tan x / \cot x$ ($t \in \mathbb{R}$) ta được phương trình bậc hai theo t.

2.2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$: $a\sin x + b\cos x = c$ ($a^2 + b^2 > 0$)

Cách giải:

- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(1)



Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos a$; $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin a$. Khi đó:

• Pt(1) thành: $\sin x \cos a + \cos x \sin a = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \hat{=} \sin(x + a) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2).$

Pt(2) là pt lượng giác dạng cơ bản nên giải dễ dàng.

Nhận xét:

- Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.
- Các phương trình $a \sin x - b \cos x = c$, $a \cos x \pm b \sin x = c$ cũng được giải tương tự.

2.3. Phương trình đẳng cấp bậc hai: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Cách giải:

- Xét xem $x = \frac{p}{2} + kp$ có là nghiệm của phương trình không.
- Với $x \neq \frac{p}{2} + kp$ ($\cos x \neq 0$), chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ (hoặc $\sin^2 x$) ta được phương trình bậc 2 theo $\tan x$ (hoặc $\cot x$).

Chú ý:

- Áp dụng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi ta có thể đưa phương trình về dạng bậc nhất theo $\sin 2x$ và $\cos 2x$.
- Phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ cũng được xem là phương trình đẳng cấp bậc hai vì $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.
- Làm tương tự cho phương trình đẳng cấp bậc n.

2.4. Phương trình đối xứng: $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$

Cách giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ($|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ ta được phương trình bậc hai theo t.

Chú ý:

- Phương trình $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ được giải tương tự.
- Phương trình $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x + \cot x) + c = 0 \quad (*) \quad (\sin x, \cos x \neq 0)$

đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$) $\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$



- Phương trình $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x - \cot x) + c = 0$ giải tương tự.

II. Bài tập:

1. Các bài toán cơ bản:

1.1. Giải phương trình :

1. $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$
2. $2\sin x + \sqrt{2} = 0$
3. $\sin(x-2) = \frac{2}{3}$
4. $\sin(x+20^\circ) = \sin 60^\circ$
5. $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$
6. $2\cos 2x + 1 = 0$
7. $\cos(2x+15^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\tan 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
9. $\tan(4x+2) = 3$
10. $\tan(2x+10^\circ) = \tan 60^\circ$
11. $\cot 4x = \sqrt{3}$
12. $\cot(x+2) = 1$.

1.2. Giải phương trình :

1. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$
2. $\cos(2x+1) = \cos(2x-1)$
3. $\tan \frac{2x+1}{6} + \tan \frac{1}{3} = 0$
4. $\sin 3x = \cos 2x$.

1.3. Giải các phương trình sau :

1. $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$
2. $4\cos^2 2x - 3 = 0$
3. $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x$
4. $\cos^2 3x + \sin^2 2x = 1$.

1.4. Tìm các nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho :

1. $2\sin 2x + 1 = 0$ với $0 < x < \pi$
2. $\cot(x-5) = \sqrt{3}$ với $-\pi < x < \pi$.

1.5. Giải các phương trình sau :

1. $\sin x + \cos x = 1$
2. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$
3. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$
4. $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \sqrt{2}/8$.

1.6. Giải các phương trình sau :

1. $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$
2. $\sqrt{3} \cos x + \sin 2x = 0$
3. $8\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \cos 8\left(\frac{\pi}{16} - x\right)$
4. $\sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^4 x = \sin 4x$.

1.7. Giải phương trình :

1. $\cos 7x \cdot \cos x = \cos 5x \cdot \cos 3x$
2. $\cos 4x + \sin 3x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos 3x$



3. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

4. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$.

1.8. Giải các phương trình sau :

1. $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$;

2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

3. $\sin^2 x + \sin^2 3x = 2 \sin^2 2x$;

4. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$.

1.8. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

1. $y = \tan x$

2. $y = \cot 2x$

3. $y = \frac{2 \cos x + 1}{2 \cos x - 1}$

4. $y = \frac{\sin(2-x)}{\cos 2x - \cos x}$

5. $y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$

6. $y = \frac{1}{\sqrt{3} \cot 2x + 1}$.

1.9. Giải phương trình :

1. $\frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$

2. $\frac{\tan x - \sqrt{3}}{2 \cos x + 1} = 0$

3. $\sin 3x \cot x = 0$

4. $\tan 3x = \tan x$.

1.10. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $4 \cos 3x \cos 2x + 2 \cos 3x + 1 = 0$.

2. Phương trình bậc hai đối với một HSLG:

2.1. Giải phương trình :

1. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

2. $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

3. $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$

4. $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$.

2.2. Giải phương trình :

1. $2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$

2. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

3. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$

4. $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$.

2.3. Giải các phương trình lượng giác sau :

1. $\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + 2 = 0$

2. $\cos x + 5 \sin \frac{x}{2} - 3 = 0$

3. $\cos 4x - \sin 2x - 1 = 0$

4. $\cos 6x - 3 \cos 3x - 1 = 0$.

2.4. Giải các phương trình :

1. $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$

2. $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 - \sqrt{3}) \tan x - 1 = 0$

3. $2 \cos 2x - 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + 2 + \sqrt{3} = 0$

4. $\frac{1}{\cos^2 x} - (2 + \sqrt{3}) \tan x - 1 + 2\sqrt{3} = 0$.

2.5. Giải các phương trình sau :

1. $\cos 5x \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3 \cos^2 x + 1$

2. $2 \cos^6 x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$



$$3. \frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$$

$$4. 2\cos 2x + \cos^2 \frac{x}{2} - 10\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}\cos x.$$

2.6. Giải các phương trình :

$$1. 3\tan^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$$

$$2. \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}$$

$$3. 5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$$

$$4. \tan^2 x + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x) = 6.$$

$$2.7. \text{Giải phương trình: } 2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0.$$

3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$:

3.1. Giải phương trình :

$$1. \sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$$

$$2. \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 2$$

$$3. 3\cos x + 4\sin x = -5$$

$$4. \sin x - 7\cos x = 7$$

$$5. 2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$$

$$6. \sin 2x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos 2x.$$

3.2. Giải phương trình :

$$1. 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$$

$$2. 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$$

$$3. 2\sin 2x \cos 2x + \sqrt{3}\cos 4x + \sqrt{2} = 0$$

$$4. 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4.$$

3.3. Giải các phương trình sau :

$$1. \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$2. \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$3. \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x$$

$$4. \sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$$

3.4. Giải các phương trình sau :

$$1. 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$2. 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

3.5. Giải các phương trình sau :

$$1. 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 1 + 4\sin^3 x$$

$$2. \sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

$$3. \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$$

$$4. 8\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$



3.6. Tìm $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}\right)$ thỏa phương trình $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -2$

3.7. Cho phương trình $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = m$

1. Tìm m để phương trình có nghiệm.
2. Giải phương trình với $m = -1$.

3.8. Cho phương trình $\sin 2x - 2m \cos x = \sin x - m$. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3.9. Giải các phương trình:

$$1. 8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}; \quad 2. 2\sqrt{\sin x} = \frac{\sqrt{3} \tan x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - 1.$$

4. Phương trình đẳng cấp:

4.1. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1. \sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x &= 0 & 2. 6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x &= 2 \\ 3. \sin 2x - 2\sin^2 x &= 2\cos 2x & 4. 2\sin^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x &= 2 \\ 5. 4\sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) &= 1 \\ 6. 3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 2\cos^2 x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.2. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1. 2\sin^3 x + 4\cos^3 x &= 3\sin x \\ 2. 3\sin^2 \frac{x}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 3\sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} &= \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ 3. 4\sin^3 x + 3\sin^2 x \cos x - \sin x - \cos^3 x &= 0. \\ 4. \sin^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin x \cos^3 x - 3\cos^4 x &= 0. \end{aligned}$$

5. Phương trình đối xứng:

Giải phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1. \cot x - \tan x &= \sin x + \cos x & 2. 2\sin x + \cot x &= 2\sin 2x + 1 \\ 3. \cos^3 x - \sin^3 x &= -1 & 4. |\sin x - \cos x| + 4\sin 2x &= 1 \\ 5. 1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x &= \frac{3}{2}\sin 4x & 6. (1 + \cos x)(1 + \sin x) &= 2 \\ 7. 1 + \tan x &= 2\sqrt{2}\sin x & 8. \cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} &= \frac{10}{3} \\ 9. \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x &= \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x \\ 10. (\tan x + 7)\tan x + (\cot x + 7)\cot x + 14 &= 0 \\ 11. \sqrt{3}(\tan^2 x + \cot^2 x) + 2(\sqrt{3} - 1)(\tan x - \cot x) - 4 - 2\sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$



12. $\tan x + \tan^2 x + \cot x + \cot^2 x = 6$

6. Các bài toán không mẫu mực :

Giải các phương trình sau:

1. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

3. $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

5. $\cot gx - \tan x = \sin x + \cos x$

7. $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

9. $\cot gx + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$

11. $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot gx + \cot^2 x + \cot^3 x = 0$

13. $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$

15. $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x \sin^2 x + 3\sin x = 0$

17. $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

19. $4\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x + 3\sin^2 x - 3 = 0$

21. $\sin x + \cos x - 2\sin 2x - 1 = 0$

23. $\sin 2x + \tan x - 2 = 0$

25. $\cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x$

27. $2\tan x + \cot gx = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$

29. $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

31. $\cot gx - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

33. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$

35. Tìm tổng các nghiệm $x \in (1; 70)$ của phương trình :

36. $\cot gx + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$

38. $\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

40. $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

42. $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$

44. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

2. $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

4. $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

6. $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

8. $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cdot \cos x$

10. $2(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x}) + 9(\frac{2}{\cos x} - \cos x) - 1 = 0$

12. $\tan x + \cot gx = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

14. $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

16. $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

18. $\cos 2x + \cos x - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x$

20. $5\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

22. $-3\cos x + \cos 2x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$

24. $3\sin x + \cos x - 4 \tan \frac{x}{2} + 1 = 0$

26. $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$

28. $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$

30. $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

32. $3(\cot gx - \tan x) = \sin 2x$

34. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

$\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$

37. $\frac{1 + \cos 2x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 3$

39. $\cot gx - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

41. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

43. $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

45. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}$



$$46. \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$$

$$48. 2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$50. \cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^3 3x$$

$$51. 5 \left(\sin x + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} \right) = \cos 2x + 3, x \in (0; 2\pi)$$

$$53. 4\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$$

$$55. \cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 4x$$

$$57. \sin 5x = 5 \sin x$$

$$59. 3\sin 5x = 5 \sin 3x$$

$$61. \text{Tìm } x \in [0; 14] \text{ thỏa phương trình: } \cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

$$62. \cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$64. 2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x 3\operatorname{tg} 3x + \cot g 2x = 2\operatorname{tg} x + \frac{2}{\sin 4x}$$

$$65. \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$67. \sin \left(2x + \frac{5\pi}{2} \right) - 3\cos \left(x - \frac{7\pi}{2} \right) = 1 + 2\sin x \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq 3\pi \right)$$

$$69. \frac{\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} = -\frac{1}{8}$$

$$71. \sin^4 x + \cos^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0$$

$$73. \sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = 3\sin \left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \right)$$

$$75. 2\sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) \cdot \cos x = 1$$

$$47. \cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3} (\cos 5x - \sin 7x)$$

$$49. 3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \sin 2x$$

$$52. \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$54. \sin x + \sin 2x + \sin 3x - \cos x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$56. \cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x = \frac{1}{4}$$

$$58. \cos \frac{4x}{3} = \cos^2 x$$

$$60. \sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$$

$$63. \cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$66. \cos x + 3\sin x = 2\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

$$68. \sin^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x$$

$$70. \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$72. 2\cos \left(2x + \frac{2006\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin 3x = 0$$

$$74. \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)} = 4\sin \left(\frac{7\pi}{4} - x \right)$$

$$76. 2\sqrt{2} \cdot \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 3\cos x - \sin x = 0$$

7. Các bài toán trong đề thi ĐH – CĐ:

$$1. \text{A}_{12}. \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1.$$

$$2. \text{B}_{12}. 2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1.$$

$$3. \text{D}_{12}. \sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x.$$

$$4. \text{A}_{11}. \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x.$$

$$5. \text{B}_{11}. \sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x.$$

$$6. \text{D}_{11}. \frac{\sin 2x + \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$$

$$7. \text{A}_{10}. \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$



8.B_10. $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0.$

9.D_10. $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0.$

10.A_09. $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$

11.B_09. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

12.D_09. $\sqrt{3} \cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$

13.CD_08. $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2\sin 2x$

14.A_08. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

15.B_08. $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

16.D_08. $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

17.A_07. $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$

18.B_07. $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

19.D_07. $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

20.A_06. $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

21.B_06. $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

22.D_06. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

23.A_05. $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

24.B_05. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

25.D_05. $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

26.A_04. Tính ba góc của $\triangle ABC$ không tù, thỏa mãn điều kiện $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3.$

27.B_04. $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

28.D_04. $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

29.A_03. $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

30.B_03. $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

31.D_03. $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

32.A_02. Tìm nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ của phương trình: $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$



33.B_02. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

34.D_02. Tìm $x \in [0; 14]$ nghiệm đúng phương trình: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$.

CÁC ĐỀ DỰ BỊ

1.A_08. $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x$

2.A_08. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.B_08. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2.B_08. $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

1.D_08. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$

1.A_07. $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$

2.A_07. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

1.B_07. $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos \frac{3x}{2}$

2.B_07. $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$

1.D_07. $2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos x = 1$

2.D_07. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

1.A_06. $\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$

2.A_06. $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$

1.B_06. $(2\sin^2 x - 1)\tan^2 2x + 3(2\cos^2 x - 1) = 0$

2.B_06. $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

1.D_06. $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$

2.D_06. $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

1.A_05. Tìm nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$ của phương trình: $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

2.A_05. $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$

1.B_05. $\sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$

2.B_05. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$



$$1.D_{05}. \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$$

$$2.D_{05}. \sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$$

$$1.A_{04}. 4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$$

$$2.A_{04}. \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \cos x} = 1$$

$$1.B_{04}. 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$2.B_{04}. \sin 4x \sin 7x = \cos 3x \cos 6x$$

$$1.D_{04}. 2\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x = \sin 4x \cos x$$

$$2.D_{04}. \sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$$

$$1.A_{03}. \cos 2x + \cos x(2\tan^2 x - 1) = 2$$

$$2.A_{03}. 3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$$

$$1.B_{03}. 3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$$

$$2.B_{03}. \frac{(2 - \sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$$

$$1.D_{03}. \frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$$

$$2.D_{03}. \cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$$



Công Thức Lượng Giác

I. Cung liên kết:

1. Cung đối: (cos đối)

$$1.1. \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$1.3. \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$1.2. \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$1.4. \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

2. Cung bù: (sin bù)

$$1.1. \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$1.3. \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$1.2. \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$1.4. \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. Cung phụ: (phụ chéo)

$$1.1. \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$1.3. \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$1.2. \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$1.4. \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

4. Cung hơn kém π :

$$1.1. \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$1.3. \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$1.2. \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$1.4. \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

II. Công thức lượng giác:

1. Hằng đẳng thức lượng giác:

$$1.1. \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$1.3. 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1.2. 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1.4. \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

2. Công thức cộng:

$$1.1. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$1.2. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$1.3. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$1.4. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$1.5. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$1.6. \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

3. Công thức nhân đôi:

$$1.1. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$1.2. \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$1.3. \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

4. Công thức nhân ba:

$$1.1. \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$1.2. \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

5. Công thức hạ bậc:

$$1.1. \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$1.2. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$1.3. \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

6. Công thức biến tổng thành tích:



$$1.1. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1.2. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1.3. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1.4. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1.5. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$1.6. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

7. Công thức biến tích về tổng:

$$1.1. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$1.2. \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$1.3. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

8. Một số công thức khác:

$$1.1. \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$$1.2. \sin \alpha - \cos \alpha = -\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

$$1.3. \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$$

$$1.4. \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}$$