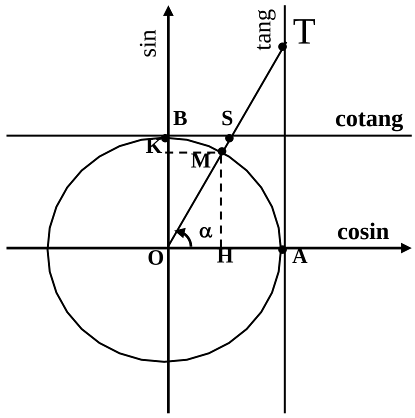
CHUYÊN ĐỀ: LƯỢNG GIÁC
CHỦ ĐỀ 1
CUNG LƯỢNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho $(OA, OM) = \alpha$. Giả sử $M(x; y)$.



$$\cos\alpha = x = \overline{OH}$$

$$\sin\alpha = y = \overline{OK}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BS} \quad (\alpha \neq k\pi)$$

Nhận xét:

- $\forall\alpha,\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1;\ -1 \leq \sin\alpha \leq 1$
- tanα xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
- cotα xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in Z$
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$

  $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$

  $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

2. Dấu của các giá trị lượng giác

Phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
cosα	+	–	–	+
sinα	+	+	–	–
tanα	+	–	+	–
cotα	+	–	+	–

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\Vert$	0
cot	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\Vert$	0	$\Vert$

4. Hệ thức cơ bản:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$; $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

5. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

Góc hơn kém π	**Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$**
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

II. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\sin b.\cos a$$

$$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\sin b.\cos a$$

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha};\qquad \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$	$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ $\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$ $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$	$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$ $\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$ $\cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$ $\cot a-\cot b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$
$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}.\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$	

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Dạng 1: Xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung:

+ Xác định điểm cuối của cung xem điểm đó thuộc cung phần tư nào, từ đó xác định dấu của các giá trị lượng giác tương ứng.

+ Phải nắm rõ các cung phần tư từ đó xác định dấu của các giá trị lượng giác; để xác định dấu của các giá trị lượng giác ta cần nắm rõ định nghĩa giá trị lượng giác của cung α và thực hiện như sau: Vẽ đường tròn lượng giác, trục đứng(Oy) là trục sin, trục nằm (Ox) là trục cosin; khi α thuộc cung phần tư nào ta cho một điểm M bất kì nằm trên cung phần tư đó, sau đó chiếu điểm M vuông góc xuống trục sin và trục cos từ đó xác định được sin dương hay âm, cos dương hay âm; tan=sin/cos; cot=cos/sin; dựa vào dấu của sin và cos ta xác định được dấu của tan và cot theo nguyên tắc chia dấu: -/-=+; -/+= -

2. Dạng 2: Tính các giá trị lượng giác của một cung:

+ Nếu biết trước $\sin\alpha$ ***thì dùng công thức:*** $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ***để tìm*** $\cos\alpha$***, lưu ý:xác định dấu của các giá trị lượng giác để nhận, loại.*** $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$***;*** $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ hoặc $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

*+ **Nếu biết trước** $\cos\alpha$ **thì tương tự như trên.***

+ Nếu biết trước** $\tan\alpha$ **thì dùng công thức:** $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **để tìm** $\cos\alpha$**, lưu ý: xác định dấu của các giá trị lượng giác để nhận, loại. $\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha$, $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

3. Dạng 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác:

Sử dụng các hằng đẳng thức đại số (7 hằng đẳng thức đáng nhớ) và các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản để biến đổi một vế thành vế kia.
biến đổi một vế thành vế kia)

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\tan\alpha.\cot\alpha=1\ \left(\alpha\neq k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\ \left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ \left(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4. Dạng 4: Đơn giản các biểu thức lượng giác:

+ Dùng các hệ thức cơ bản và giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Giá trị lg của các góc có liên quan đặc biệt: ***"sin bù,cos đối,phụ chéo,hơn kém tan sai*** π***"***

+ Chú ý: *Với* $k\in\mathbb{Z}$ *ta có:*

$\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$

$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Dạng 1:

Bài tập 1.1: Cho $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$**. Xác định dấu của các giá trị lượng giác:**

a) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ $\qquad$ b) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ c) $\tan(\alpha+\pi)$ $\qquad$ d) $\cot\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

a) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow-\pi<-\alpha<-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{2}-\alpha<\pi$ vậy $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0$

Dạng 2:

Bài tập 2.1: Tính các giá trị lượng giác của góc α biết:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

b) $\cos\alpha=\frac{4}{13},0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

c) $\tan\alpha=-\frac{4}{5},\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

d) $\cot\alpha=-3,\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

e) $\sin\alpha=-\frac{2}{5},0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

f) $\cos\alpha=0,8$ với $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

g) $\tan\alpha=\frac{13}{8},0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

h) $\cot\alpha=-\frac{19}{7},\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

i) $\cos\alpha=-\frac{1}{4},\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

j) $\sin\alpha=\frac{2}{3},\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

k) $\tan\alpha=\frac{7}{3},0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

l) $\cot\alpha=-\frac{4}{19},\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

Giải

a) Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên $\cos\alpha<0,\tan\alpha<0,\cot\alpha<0$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{4}{5}(loai)\\ \cos\alpha=-\frac{4}{5}(nhan)\end{array}\right.$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4};\ \cot\alpha=-\frac{4}{3}$$

c) Do $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ nên $\sin\alpha<0,\cos\alpha>0,\cot\alpha<0$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{25}{41}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{41}}(nhan)\\ \cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{41}}(loai)\end{array}\right.$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha.\tan\alpha=-\frac{4}{\sqrt{41}};\ \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{\sqrt{41}}{4}$$

Các bài tập còn lại làm tương tự.

Bài tập 2.2: Biết $\sin a=\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2}<a<\pi$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc: $2\alpha;\frac{\alpha}{2}$

a) Do $\frac{\pi}{2}<a<\pi$ nên $\cos a<0 \Rightarrow \cos a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin 2a=2\sin a\cos a=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=\frac{7}{9}$

$\tan 2a=\frac{4\sqrt{2}}{7};\cot a=\frac{7}{4\sqrt{2}}$

b) $\frac{\pi}{2}<a<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}>0,\sin\frac{\alpha}{2}>0$

$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2} \Rightarrow \sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$

$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$

$\tan\frac{a}{2}=3+2\sqrt{2};\cot\frac{a}{2}=3-2\sqrt{2}$

Bài tập 2.3: Tính $\cos 2a,\sin 2a,\tan 2a$ biết:

a) $\cos a=-\frac{5}{13},\quad \pi<a<\frac{3\pi}{2}$; $\quad\cos a=-\frac{5}{13},\frac{\pi}{2}<a<\pi$; $\quad\cos a=\frac{4}{5},\quad -\frac{\pi}{2}<a<0$

b) $\sin a=-\frac{3}{5},\quad \pi<a<\frac{3\pi}{2}$

c) $\sin a+\cos a=\frac{1}{2}$ và $\frac{3\pi}{4}<a<\pi$

Hướng dẫn:

a) tính sina, sau đó áp dụng các công thức nhân đôi.

$\sin a=-\frac{12}{13}$; $\sin 2a=\frac{120}{169}$; $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=-\frac{119}{169}$ hoặc $\cos 2a=2\cos^2 a-1$;

$\tan 2a=-\frac{120}{169}$

c) $\sin a+\cos a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin a+\cos a)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 1+\sin 2a=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2a=-\frac{3}{4}$

$\frac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 2a < 2\pi \Rightarrow \cos 2a > 0$; $\cos 2a = \sqrt{1-\sin^2 2a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan 2a = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

Bài tập 2.4: Cho $\sin 2a = -\frac{5}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính sina, cosa

+ Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a > 0, \cos a < 0$

+ $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \pi < 2a < 2\pi$ nên cos2a có thể dương và có thể âm

$\cos 2a = \pm\sqrt{1-\sin^2 2a} = \pm\frac{2\sqrt{14}}{9}$

TH1: $\cos 2a = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\cos a = -\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} = -\frac{2+\sqrt{14}}{6}$; $\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} = \frac{\sqrt{14}-2}{6}$

TH2: $\cos 2a = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\cos a = -\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} = \frac{\sqrt{14}-2}{2}$; $\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} = \frac{2+\sqrt{14}}{6}$

Dạng 3:

Bài tập 3.1: Chứng minh các đẳng thức lượng giác:

a) $\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = 1 - \sin a \cos a$ Biến đổi:

$\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)$

b) $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1 + 2\sin a \cos a} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$ Biến đổi: $\sin^2 a - \cos^2 a = (\sin a + \cos a)(\sin a - \cos a)$, chia tử và mẫu cho $\cos a$

c) $\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^6 a - \cos^6 a = \sin^2 a \cos^2 a$ Biến đổi:

$\sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a)$

d) $\dfrac{\tan a-\tan b}{\cot b-\cot a}=\tan a\tan b$ Biến đổi: $\cot b-\cot a=\dfrac{1}{\tan b}-\dfrac{1}{\tan a}$

e) $2\left(sin^6a+cos^6a\right)+1=3\left(sin^4a+cos^4a\right)$

$VT=\sin^6a+cos^6a=2\left(sin^2a+cos^2a\right)\left(\sin^4a-\sin^2a\cos^2a+cos^4a\right)+1$

$=2\left(\sin^4a+cos^4a\right)+1-2\sin^2a\cos^2a=2\left(\sin^4a+cos^4a\right)+\left(\sin^2a+cos^2a\right)^2-2\sin^2a\cos^2a=VP$

f) $3\left(\sin^4x+cos^4x\right)-2\left(\sin^6x+cos^6x\right)=1$

Sử dụng $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ và a^3+b^3

g) $\tan^2a-\sin^2a=\tan^2a.\sin^2a$

$VT=\dfrac{\sin^2a}{\cos^2a}-\sin^2a=\sin^2a\left(1+\tan^2a-1\right)=VP$

h) $\dfrac{\sin a}{1+\cos a}+\dfrac{1+\cos a}{\sin a}=\dfrac{2}{\sin a}$

$VT=\dfrac{\sin^2a+(1+\cos a)^2}{\sin a(1+\cos a)}=\dfrac{\sin^2a+1+2\cos a+cos^2a}{\sin a(1+\cos a)}=VP$

i) $cos^4a-\sin^4a=2\cos^2a-1$

Sử dụng a^2-b^2

j) $1+2\tan^2a=\dfrac{1+\sin^2a}{1-\sin^2a}$ (nếu $\sin a\neq\pm1$)

$VP=\dfrac{1+\sin^2a}{\cos^2a}=\dfrac{1}{\cos^2a}+\dfrac{\sin^2a}{\cos^2a}=...=VT$

k) $\dfrac{\sin^2a-cos^2a}{1+2\sin a\cos a}=\dfrac{1-\cot a}{1+\cot a}$

$VT=\dfrac{(\sin a-\cos a)(\sin a+\cos a)}{(\sin a+\cos a)^2}=\dfrac{\dfrac{\sin a-\cos a}{\sin a}}{\dfrac{\sin a+\cos a}{\sin a}}=VP$

l) $\cot^2a-cos^2a=\cot^2a\cos^2a$

$VT=\dfrac{cos^2a}{\sin^2a}-cos^2a=\dfrac{\cos^2a\left(1-\sin^2a\right)}{\sin^2a}=VP$

m) $\tan^2 a-\sin^2 a=\tan^2 a\sin^2 a$

n) $\dfrac{\tan a}{\sin a}-\dfrac{\sin a}{\cot a}=\cos a$

o) $\dfrac{1+\sin^2 a}{1-\sin^2 a}=1+2\tan^2 a$

p) $\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\cot^2 a-\tan^2 a}=\sin^2 a.\cos^2 a$

Bài tập 3.2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 a+\cos^4 a=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2a=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4a$

$\sin^4 a+\cos^4 a=\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)^2-2\sin^2 a\cos^2 a=1-2.\left(\sin a\cos a\right)^2=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2a\quad(1)$

$=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2a=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos 4a}{2}\right)=1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4a=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4a\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

b) $\sin^6 a+\cos^6 a=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4a$

Hướng dẫn: $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ sau đó áp dụng $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

c) $\sin a\cos^5 a-\cos a\sin^5 a=\dfrac{1}{4}\sin 4a$

$\sin a\cos^5 a-\cos a\sin^5 a=\sin a\cos a\left(\cos^4 a-\sin^4 a\right)=\sin a\cos a\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)\left(\cos^2 a+\sin^2 a\right)=...$

d) $\cos^8 a-\sin^8 a=\cos 2a-\dfrac{1}{4}\sin 4a\sin 2a$

Sử dụng $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ sau đó sử dụng $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

e) $\dfrac{\cos 2a}{1+\sin 2a}=\dfrac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}$

$VT=\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 a}{1+2\sin a\cos a}=\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\left(\sin a+\cos a\right)^2}=...$

f) $\cot x+\tan x=\dfrac{2}{\sin 2x}$

Hướng dẫn: $\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}=...$

g) $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ phân tích như trên

h) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\tan x$ Hướng dẫn: $VT=\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=...$

i) $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x$ Hướng dẫn: $VT=\dfrac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=...$

j) $\cos^3 a\sin a-\sin^3 a\cos a=\dfrac{1}{4}\sin 4a$

Hướng dẫn: Tương tự như câu c

k) $\dfrac{\sin^3 a-\cos^3 a}{\sin a-\cos a}=1+\dfrac{\sin 2a}{2}$ Sử dụng hằng đẳng thức a^3-b^3

l) $\dfrac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}-\dfrac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}=2\tan 2a$

Hướng dẫn: Quy đồng mẫu

m) $\dfrac{\sin 2a-2\sin a}{\sin 2a+2\sin a}=-\tan^2\dfrac{a}{2}$

Hướng dẫn: sin2a=2sinacosa; đặt nhân tử chung sau đó áp dụng $1-\cos a=2\sin^2\dfrac{a}{2}$

n) $\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}=\cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}\right)$

$$VT=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}=\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}\right)}=VP$$

0) $\dfrac{\sin 2a+\sin a}{1+\cos 2a+\cos a}=\tan a$

Hướng dẫn: $VT=\dfrac{2\sin a\cos a}{2\cos^2 a+\cos a}=...$

p) $\dfrac{4\sin^2 a}{1-\cos^2\dfrac{a}{2}=16\cos^2\dfrac{a}{2}}$

Hướng dẫn: $VT=\dfrac{4.4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}}=VP$

q) $\dfrac{\tan 2a}{\tan 4a-\tan 2a}=\cos 4a$

$VT=\dfrac{\tan 2a}{\dfrac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a}-\tan 2a}=\dfrac{1-\tan^2 2a}{1+\tan^2 2a}=...$

r) $\dfrac{3-4\cos 2a+\cos 4a}{3+4\cos 2a+\cos 4a}=\tan^4 a$

HD: $\cos 4a=2\cos^2 2a-1$ sau đó sử dụng $\cos 2a-1=-2\sin^2 a$

s) $\dfrac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a}=\tan 3a$

$VT=\dfrac{(\sin 5a+\sin a)+\sin 3a}{(\cos 5a+\cos a)+\cos 3a}=...$

t) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\tan^2\dfrac{a}{2}-\cos^2 a=\sin^2 a$

Sử dụng công thức hạ bậc $1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$

Bài tập 3.3: Chứng minh các biểu thức sau là những hằng số không phụ thuộc vào a

a) $A=2\left(\sin^6 a+\cos^6 a\right)-3\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)$

Sử dụng a^3+b^3 $\qquad A=-1$

b) $B=4\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)-\cos 4a$

Sử dụng $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ và $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ $\qquad B=3$

c) $4\cos^4 a-2\cos 2a-\dfrac{1}{2}\cos 4a$

Sử dụng $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ $\qquad C=\dfrac{3}{2}$

Dạng 4:

Bài tập 4.1: Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A=\left(1-\sin^2 a\right)\cot^2 a+1-\cot^2 a$

$$A=\cot^2 a-\sin^2 a.\cot^2 a+1-\cot^2 a=1-\sin^2 a\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}=\sin^2 a$$

b) $B=\dfrac{2\cos^2 a-1}{\sin a+\cos a}$

$$B=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a+\cos a}=\cos a-\sin a$$

c) $C=\left(1+\cot a\right)\sin^3 a+\left(1+\tan a\right)\cos^3 a$

$$C=\left(1+\frac{\cos a}{\sin a}\right)\sin^3 a+\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)\cos^3 a=\left(\sin a+\cos a\right)\sin^2 a+\left(\cos a+\sin a\right)\cos^2 a=\sin a+\cos a$$

d) $D=\dfrac{\sin^2 a-\tan^2 a}{\cos^2 a-\cot^2 a}$

$$D=\frac{\sin^2 a\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 a}\right)}{\cos^2 a\left(1-\dfrac{1}{\sin^2 a}\right)}=\frac{\sin^2 a\dfrac{1-\cos^2 a}{\cos^2 a}}{\cos^2 a\dfrac{1-\sin^2 a}{\sin^2 a}}=\frac{\sin^4 a}{\cos^4 a}.\frac{\left(-\sin^2 a\right)}{\left(-\cos^2 a\right)}=\tan^6 a$$

e) $E=\dfrac{\left(\sin a+\cos a\right)^2-1}{\cot a-\sin a\cos a}$

$$E=\frac{\sin^2 a+2\sin a\cos a+\cos^2 a-1}{\cos a\left(\dfrac{1}{\sin a}-\sin a\right)}=\frac{2\sin a\cos a.\sin a}{\cos a.\cos^2 a}=2\tan^2 a$$

f) $F=\dfrac{1-\sin^2 a\cos^2 a}{\sin^2 a}-\sin^2 a$

$$F=\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\cos^2 a\right)-\sin^2 a=\frac{1}{\sin^2 a}-\left(\cos^2 a+\sin^2 a\right)=1+\cot^2 a-1=\cot^2 a$$

g) $G=\dfrac{2\cos^2 a-1}{\sin a+\cos a}$

$$G=\frac{2\cos^2 a-\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)}{\sin a+\cos a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a+\cos a}=\cos a-\sin a$$

h) $H=\sin^2 a\left(1+\cot a\right)+\cos^2 a\left(1+\tan a\right)$

$H=\sin^2 a\left(1+\cot a\right)+\cos^2 a\left(1+\tan a\right)=\sin^2 a+\sin^2 a\dfrac{\cos a}{\sin a}+\cos^2 a+\cos^2 a.\dfrac{\sin a}{\cos a}$

$=\sin^2 a+2\sin a\cos a+\cos^2 a=\left(\sin a+\cos a\right)^2$

i) $I=\cos^2 a+\cos^2 a.\cot^2 a$ I$=\cot^2 a$

j) $J=\sin^2 a+\sin^2 a.\tan^2 a$ J$=\tan^2 a$

k) $K=\dfrac{2\cos^2 a-1}{\sin a+\cos a}$ K$=\cos a-\sin a$

Bài tập 4.2: Đơn giản các biểu thức:

a) $A=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\pi\right)$ A=1

b) $B=\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^2\dfrac{3\pi}{8}-\cos^2\alpha$ B$=\sin^2\alpha$

Hướng dẫn: $\sin\dfrac{3\pi}{8}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{8}\right)=\cos\dfrac{\pi}{8}$

c) $C=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\pi-x\right)+\tan\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)+\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ C=-2cosx

Hướng dẫn: $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$;

$\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$

$\tan\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=\tan\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

$\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cot x$

d) $D=\sin\left(\pi+x\right)+\cos\left(\dfrac{17\pi}{2}+x\right)+\tan\left(5\pi-x\right)-\cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right)$ D=-2sinx

Hướng dẫn: $\cos\left(\dfrac{17\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x+8x\right)=-\sin x$

$\cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right)=\cot\left[-\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)\right]=-\cot\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)=-\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x+4\pi\right)=-\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\tan x$

e) $E=\sin\left(\pi+a\right)-\text{có}\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)+\cot\left(2\pi-a\right)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-a\right)$ E=-2sina

Hướng dẫn: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\tan\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot a$

Bài tập 4.3: Tính:

a) $A=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+\sin^2 30^0+...+\sin^2 80^0$ (8 số hạng)

$A=\left(\sin^2 10^0+\sin^2 80^0\right)+\left(\sin^2 20^0+\sin^2 70^0\right)+\left(\sin^2 30^0+\sin^2 60^0\right)+\left(\sin^2 40^0+\sin^2 50^0\right)$

$=\left(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0\right)+\left(\sin^2 20^0+\cos^2 20^0\right)+\left(\sin^2 30^0+\cos^2 30^0\right)+\left(\sin^2 40^0+\cos^2 40^0\right)=4$

b) $B=\cos 10^0+\cos 20^0+\cos 30^0+...+\cos 180^0$ (18 số hạng)

$B=\left(\cos 10^0+\cos 170^0\right)+\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+...+\left(\cos 90^0+\cos 180^0\right)$

$=\left(\cos 10^0-\cos 10^0\right)+\left(\cos 20^0-\cos 20^0\right)+...+\left(0+(-1)\right)=-1$

c) $C=\sin\frac{25\pi}{4}+\cos\frac{9\pi}{4}+\tan\frac{4\pi}{3}-\cot\frac{19\pi}{6}$

$C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+6\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)-\cot\left(\frac{\pi}{6}+3\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}$

d) $D=\tan 10^0.\tan 20^0...\tan 70^0,\tan 80^0$

$D=\left(\tan 10^0.\tan 80^0\right)\left(\tan 20^0.\tan 70^0\right)\left(\tan 30^0.\tan 60^0\right)\left(\tan 40^0.\tan 50^0\right)=\left(\tan 10^0.\cot 10^0\right).....=1$

e) $E=\cos 20^0+\cos 40^0+\cos 60^0+...+\cos 180^0$

$E=\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+\left(\cos 40^0+\cos 140^0\right)+...+\cos 180^0=-1$

($\cos 160^0=\cos\left(180^0-20^0\right)=-\cos 20^0$; tương tự những phần còn lại nên $\cos 20^0+\cos 160^0=0$)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

1. Nhận biết:

Câu 1: Góc có số đo 120^0 được đổi sang số đo rad là :

A. 120π B. $\frac{3\pi}{2}$ C. 12π <u>D.</u> $\frac{2\pi}{3}$

Câu 2: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. $\cos 45^o=\sin 135^o$. <u>B.</u> $\cos 120^o=\sin 60^o$. C. $\cos 45^o=\sin 45^o$. D. $\cos 30^o=\sin 120^o$.

Câu 3: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi Với mọi α; β ta có:

A. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$

C. $\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta$

B. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

D. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

Câu 4: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi Với mọi α; β ta có:

A. $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha$

C. $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

B. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

D. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

Câu 5: $\sin\dfrac{3\pi}{10}$ là:

A. $\cos\dfrac{4\pi}{5}$

B. $\cos\dfrac{\pi}{5}$

C. $1-\cos\dfrac{\pi}{5}$

D. $-\cos\dfrac{\pi}{5}$

2. Thông hiểu:

Câu 6: Biểu thức $A=\sin(\pi+x)-\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)+\cot(-x+\pi)+\tan(\dfrac{3\pi}{2}-x)$ có biểu thức rút gọn là:

A. $A=2\sin x$.

B. $A=-2\sin x$

C. $A=0$.

D. $A=-2\cot x$.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**:

A. $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

B. $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$

C. $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

D. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\sin^2 x\cos^2 x$

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức $P=\tan\alpha-\tan\alpha\sin^2\alpha$ nếu cho $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ $\left(\pi\langle\alpha\langle\dfrac{3\pi}{2}\right)$

A. $\dfrac{12}{15}$

B. $-\sqrt{3}$

C. $\dfrac{1}{3}$

D. 1

Câu 9: Cho $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<0\right)$ thì $\sin x$ có giá trị bằng :

A. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\dfrac{-3}{\sqrt{5}}$.

C. $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.

D. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 10: Biết $\sin a=\dfrac{5}{13};\cos b=\dfrac{3}{5}$ $(\dfrac{\pi}{2}<a<\pi;\ 0<b<\dfrac{\pi}{2})$ Hãy tính $\sin(a+b)$.

A. 0 **B.** $\frac{63}{65}$ **C.** $\frac{56}{65}$ **D.** $\frac{-33}{65}$

Câu 11: Với mọi số nguyên k, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos(k\pi)=(-1)^k$ B. $\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})=(-1)^k$

C. $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(-1)^k$

Câu 12: Giá trị $\cos[\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi]$ bằng :

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 13: Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng.Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút,biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$ (lấy $\pi=3,1416$)

A. $22054cm$ **B.** $22043cm$ **C.** $22055cm$ **D.** $22042cm$

Câu 14: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$.Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là:

A. $2,77cm$. **B.** $2,78cm$. **C.** $2,76cm$. **D.** $2,8cm$.

Câu 15: Cho $\sin a+\cos a=\frac{5}{4}$. Khi đó $\sin a.\cos a$ có giá trị bằng :

A. 1 **B.** $\frac{9}{32}$ **C.** $\frac{3}{16}$ **D.** $\frac{5}{4}$

3. Vận dụng thấp:

Câu 16: Đơn giản biểu thức $E=\cot x+\frac{\sin x}{1+\cos x}$ ta được

A. $\frac{1}{\sin x}$ **B.** cosx **C.** sinx **D.** $\frac{1}{\cos x}$

Câu 17: Cho $\cot\frac{\pi}{14}=a$.Tính $K=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}$

A. a **B.** $-\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{4}$

Câu 18: Đơn giản biểu thức $F=\dfrac{\cos x\tan x}{\sin^2 x}-\cot x\cos x$

A. $\dfrac{1}{\sin x}$ B. $\dfrac{1}{\cos x}$ C.cosx D. sinx

Câu 19: Đơn giản biểu thức $G=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x$

A. $\dfrac{1}{\sin x}$ B. $\dfrac{1}{\cos x}$ C.cosx D. $\sin^2$x

Câu 20: Tính $M=\tan 1^0\tan 2^0\tan 3^0....\tan 89^0$

A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** $\dfrac{1}{2}$

4. Vận dụng cao:

Câu 21: Cho $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ và gọi $\mathrm{M}=\sin^3 x+\cos^3 x$. Giá trị của M là:

A. $M=\dfrac{1}{8}$. **B.** $M=\dfrac{11}{16}$. **C.** $M=-\dfrac{7}{16}$. **D.** $M=-\dfrac{11}{16}$.

Câu 22: Cho $\tan\alpha=3$. Khi đó $\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{4\sin\alpha-5\cos\alpha}$ có giá trị bằng :

A. $\dfrac{7}{9}$. **B.** $-\dfrac{7}{9}$. **C.** $\dfrac{9}{7}$. **D.** $-\dfrac{9}{7}$.

Câu 23: Cho $\tan\alpha+\cot\alpha=m$ Tính giá trị biểu thức $\cot^3\alpha+\tan^3\alpha$.

A. m^3+3m **B.** m^3-3m **C.** $3m^3+m$ **D.** $3m^3-m$

Câu 24: Với giá trị nào của *n* thì đẳng thức sau luôn đúng

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}=\cos\frac{x}{n},\ 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 25: Biết $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\tan^2 x}+\dfrac{1}{\cot^2 x}=6$. Khi đó giá trị của $\cos 2x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

CHỦ ĐỀ 2:
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

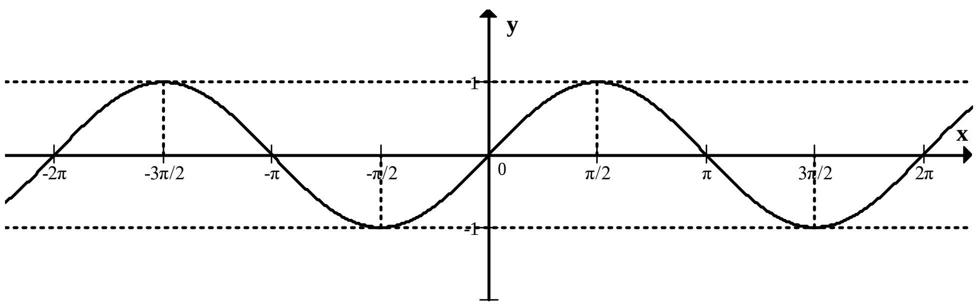
1. Hàm số y = sin x.

*/ Tập xác định: D = $\mathbb{R}$;

*/ $\forall x \in \mathbb{R}$ ta luôn có: $-1 \le \sin x \le 1$;

*/ Hàm số y = sin x là một hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

*/ Đồ thị:



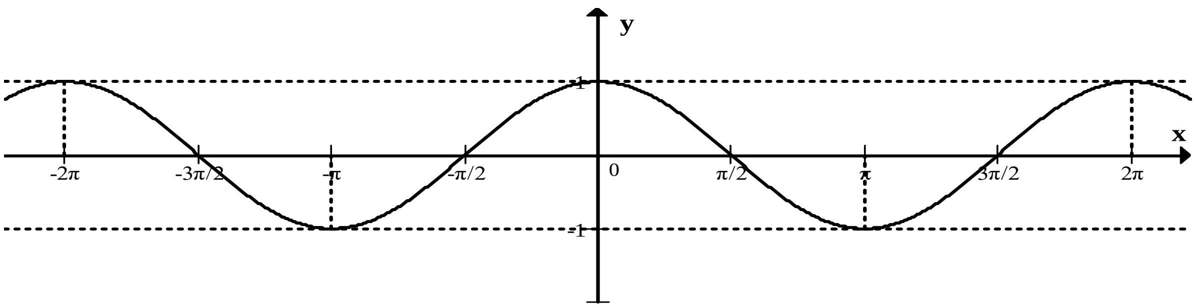
2. Hàm số y = cos x.

*/ Tập xác định: D = $\mathbb{R}$;

*/ $\forall x \in \mathbb{R}$ ta luôn có: $-1 \le \cos x \le 1$;

*/ Hàm số y = cos x là một hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

*/ Đồ thị:

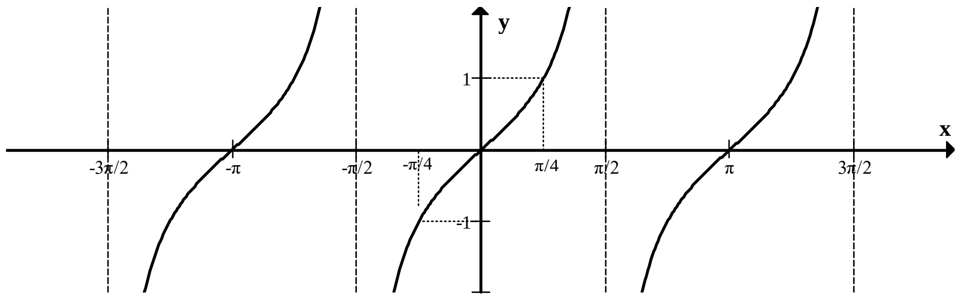


3. Hàm số y = tan x.

*/ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$;

*/ Hàm số y = tan x là một hàm số lẻ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ π ;

*/ Đồ thị:

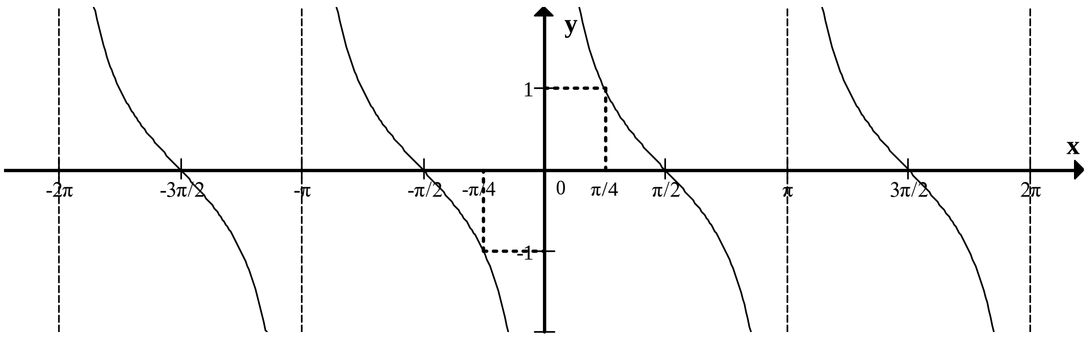


4. Hàm số y = cot x.

*/ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$;

*/ Hàm số y = cot x là một hàm số lẻ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ π ;

*/ Đồ thị:



B. CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

<u>Dạng 1</u>. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

1.1 Kĩ năng cơ bản

a. D được gọi là TXĐ của hs $y=f(x)\Leftrightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)$ có nghĩa$\}$

b. $\frac{A}{B}$ có nghĩa khi $B\neq 0$; $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A\geq 0$ **;** $\frac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa khi $B>0$

c. $-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$ $\qquad 1 \pm \sin x \ge 0 \,\&\, 1 \pm \cos x \ge 0$

d. Các giá trị đặc biệt :

$\bullet \sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\bullet \cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$
$\bullet \sin x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\bullet \cos x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\bullet \sin x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\bullet \cos x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

e. Hàm số y = tanx xác định khi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f. **Hàm số y = cotx xác định khi** $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.2 Bài tập luyện tập

Bài 1: Tìm tập xác định của các hàm số:

1/ $y = \cos 2x$ $\qquad$ 2/ $y = \sin\sqrt{3x}$

3/ $y = \sin\frac{1}{x}$ $\qquad$ 4/ $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$

Giải.

1/ Do $2x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

2/ Hàm số $y = \sin\sqrt{3x}$ xác định khi và chỉ khi $3x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [0; +\infty)$.

3/ Hàm số $y = \sin\frac{1}{x}$ xác định khi và chỉ khi $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \ne 0$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4/ Hàm số $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$ xác định khi và chỉ khi $x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Bài 2: Tìm tập xác định của các hàm số:

1/ $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; 2/ $y=\sqrt{2-\cos 3x}$;

3/ $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 4/ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Giải.

1/ Hàm số $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2/ Hàm số $y=\sqrt{2-\cos 3x}$ xác định khi và chỉ khi $2-\cos 3x\geq 0$. Mà $2-\cos 3x\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

3/ Hàm số $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4/ Hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0 \Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{6}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow 2x\neq\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 2: Xác định tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

2.1. Kĩ năng cơ bản

Chú ý : cos(-x) = cosx ; sin(-x) = -sinx ; tan(-x) = - tanx ; cot(-x) = -cotx

Phương pháp: Bước 1 : Tìm TXĐ: D ; Kiểm tra $x\in D \Rightarrow -x\in D,\ \forall x$

Bước 2 : Tính f(-x) ; so sánh với f(x) . Có 3 khả năng

+) Nếu f(-x) = f(x) thì f(x) là hàm số chẵn.

+) Nếu f(-x) = - f(x) thì f(x) là hàm số lẻ.

+) Nếu f(-x) ≠ - f(x) ≠ f(x) thì f(x) là hàm số không chẵn không lẻ.

Lưu ý: Một số nhận xét nhanh để xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

+ Tổng hoặc hiệu của hai hàm chẵn là hàm chẵn

+ Tích của hai hàm chẳn là hàm chẵn, tích của hai hàm lẻ là hàm chẵn

+ Tích của một hàm chẵn và hàm lẻ là hàm lẻ

+ Bình phương hoặc trị tuyệt đối của hàm lẻ là hàm chẵn (Áp dụng điều này chúng ta có thể xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác một cách nhanh chóng để làm trắc nghiệm nhanh chóng hơn nhiều).

2.2 Bài tập luyện tập

Bài tập: Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số:

1/ $y = x^2\sin 3x$ 2/ $y = \cos x + \sin^2 x$

3/ $y = \tan x.\cos 2x$ 4/ $y = 2\cos x — 3\sin x$.

Giải.

1/ Tập xác định của hàm số $y = f(x) = x^2\sin 3x$ là $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D$ ta có:

*/ $-x \in D$;

*/ $f(-x) = (-x)^2\sin(-3x) = - x^2\sin 3x = - f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

2/ Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ là $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D$ ta có:

*/ $-x \in D$;

*/ $f(-x) = \cos(- x) + \sin^2(- x) = \cos x + \sin^2 x = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

3/ Tập xác định của hàm số y = f(x) = tanx.cos2x là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$\forall x \in D$ ta có:

*/ $-x \in D$;

*/ f(-x) = tan(-x).cos(-2x) =- tanx.cos2x = - f(x).

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ trên D.

4/ Tập xác định của hàm số y = f(x) = 2cosx — 3sinx là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, mặt khác $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq \pm f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đã cho không phải là hàm số chẫn và cũng không phải là hàm số lẻ.

Dạng 3: Tìm tập giá trị, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

3.1 Kĩ năng cơ bản

Sử dụng các t/c sau :

- $-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$; $0 \le \sin^2 x \le 1$; $A^2 + B \ge B$
- $-1 \le -\sin x \le 1, -1 \le -\cos x \le 1; 0 \le \cos^2 x \le 1$
- Hàm số y = f(x) luôn đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$; $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$
- Hàm số y = f(x) luôn nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$; $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$
- $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$

3.2 Bài tập luyện tập

Bài tập: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

1/ $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

2/ $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$

Giải:

1/ Ta có $\forall x \in \mathbb{R}: -1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 2 \Rightarrow -3 \le y \le 1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1, xảy ra khi

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Giá trị nhỏ nhất của y là -3 đạt được khi

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2/ Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \le 1 + \sin x \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{1 + \sin x} \le \sqrt{2} \Rightarrow -3 \le y \le \sqrt{2} - 3.$

Vậy, giá trị lớn nhất của y là $\sqrt{2} - 3$, khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; giá trị nhỏ nhất của y là -3, khi sin x = -1 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Dạng 4.Tìm chu kỳ của hàm sốlượng giác

Phương pháp giải: Khi tìm chu kì của hàm số lượng giác, ta cần biến đổi biểu thức của hàm số đã cho về một biểu thức tối giản và lưu ý rằng:

1) Hàm số y = sinx , y = cosx có chu kỳ T = 2π .

2) Hàm số y = tanx , y = cotx có chu kỳ T = π .

3) Hàm số y = sin(ax+b) , y = cos(ax+b), với $a \neq 0$ có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

4) Hàm số y = tan(ax+b) , y = cot(ax+b), với $a \neq 0$ có chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$.

5) Hàm số f_1 có chu kỳ là T_1 , hàm số f_2 có chu kỳ là T_2 thì hàm số $f_1 \pm f_2$ có chu kỳ $T = BCNN(T_1, T_2)$.

Bài tập:

Bài 1. Tìm chu kỳ của hàm số $y = 1 - \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$

Giải: Chu kỳ $T = \frac{2\pi}{3}$

Bài 2. Tìm chu kỳ của hàm số $y = 2\cot\left(-4x - \frac{\pi}{3}\right)$

Giải: Chu kỳ $T = \frac{\pi}{|-4|} = \frac{\pi}{4}$

Bài 3. Tìm chu kỳ của hàm số $y = \cos^2 x + \tan(2x - \pi)$

Giải: ta có: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \to T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\tan(2x - \pi) \to T_2 = \frac{\pi}{2}$

Vậy chu kỳ của hàm số là: $T = BCNN\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \pi$

Bài 4. Tìm chu kỳ của hàm số $y = \sin x \cos 3\text{x}$

Giải:

Ta có : $y = \sin x \cos 3\text{x} = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x$

+) Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$ có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

+) Hàm số $y = \frac{1}{2}\sin 4x$ có chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Vậy chu kỳ của hàm số là: $T = BCNN\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \pi$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

1. Nhận biết

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x}$ là?

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ B. $D = \mathbb{R}$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Câu 2. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \cos x$. B. $y = \sin x$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cot x$

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là **SAI**?
A. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0; \pi]$.

B. Hàm số $y=\sin x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.
C. Hàm số $y=\cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.
D. Hàm số $y=\tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin 2x-5$ là:

<u>A.</u> -2. B. -8. C. -5. D. 3.

Câu 5. Hàm số $y=\sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

<u>A.</u> π . B. 2π . C. 3π . A. 4π .

2. Thông hiểu

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

<u>A.</u> $x \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ B. $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ C. $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ D. $x \neq \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ là

<u>A.</u> $D=\mathbb{R}\backslash\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ B. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{2-\cos x}$ là?

<u>A.</u> $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R}\backslash\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ C. $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ D. $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

Câu 9. Biết rằng y = f(x) là một hàm số lẻ trên tập xác định D. Khẳng định nào sai?

A. f[sin(– x)] = – f(sinx). **B.** f[cos(– x)] = f(cosx).

<u>**C.**</u> sin[f(– x)] = sin[f(x)]. **D.** cos[f(– x)] = cos[f(x)].

Câu 10. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

A. $y=\frac{\sin x}{1-\sin x}$. B. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$. C. $y = \frac{\cos x}{x+x^2}$. <u>D.</u> $y=\frac{\tan x}{1+\sin^2 x}$.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=7-2\cos(x+\frac{\pi}{4})$ lần lượt là:

A. -2 và 7. B. -2 và 2. C. 5 và 9. D. 4 và 7.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+2$ là:

A. -20. B. -1. C. 0. D. 9.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=4-2\cos x-\cos^2 x$ là:

A. 2. B. 5. C. 0. D. 3.

Câu 14. Tập giá trị của hàm sô $y=\tan(x-2)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ B. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ D. $\mathbb{R}$

Câu 15. Hàm số $y=\tan\left(-4x-\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

A. $-\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $-\frac{\pi}{2}$. A. $\frac{\pi}{4}$.

3. Vân dụng

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\tan^2 x+1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ C. $D=\mathbb{R}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\right\}$

Câu17. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+\cos x}$ là?

A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 18. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên R?

A. y = x.cos2x. B. y = (x^2+1).sinx. C. y = $\frac{\cos x}{1+x^2}$. D. $y=\frac{\tan x}{1+x^2}$.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$ và 2. B. 2 và 4. C. $4\sqrt{2}$ và 8. D. $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Câu 20. Hàm số $y=\sin 2x+\cos 3x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

A. π. B. 2π. C. 3π. A. 4π.

Câu 21. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=3-\sqrt{1-\cos x}$ bằng:

A. $6-\sqrt{2}$. B. $4+\sqrt{2}$. C. $4-\sqrt{2}$. D. $2+\sqrt{2}$.

4. Vân dụng cao

Câu 22. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{2m+1-\cos x}$ xác định trên R là

A. $m\ge 0$. B. $m\le 1$ C. $m\ge 1$ D. $m\ge -1$

Câu 23. Gọi S là tập giá trị của hàm số $y=\frac{\sin^2 x}{2}+3-\frac{3}{4}\cos 2x$. Khi đó tổng các giá trị nguyên của S là:

A. 3. B. 4. C. 6 . D. 7.

Câu 24. Với các giá trị nào của m thì hàm số $y=\tan x-2(m^2-1)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ?

A. $m=\pm 2$. B. $m=\pm 1$ C. $m=\pm\sqrt{2}$ D. $m\pm\frac{1}{2}$

Câu 25. Hàm số $y=\cos(2x+1)-\frac{1}{2}\sin(\frac{2x}{m}-3), m\in\mathbb{N}^*$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 3π thì giá trị của m bằng

A. 1. B. 3. C. 6 . A. 2 .

CHỦ ĐỀ 3:

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giải và biện luận phương trình $\sin x = m$ **(1)**

Bước1: Nếu |m|>1 phương trình vô nghiệm

Bước 2: Nếu |m|≤ 1 ,ta xét 2 khả năng

- Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của góc đặc biệt ,giả sử α khi đó phương trình sẽ có dạng đặc biệt.

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}$$

- Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt khi đó ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}$$

- Các trường hợp đặc biệt:

+) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

2. Giải và biện luận phương trình lượng giác $\cos x = m \quad (b)$

Bước 1: Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm .

Bước 2: Nếu $|m| \le 1$ ta xét 2 khả năng:

- Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử góc α. Khi đó phương trình có dạng

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

- Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt khi đó

Ta có: $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \quad ,k \in \mathbb{Z}$

- Các trường hợp đặc biệt:

+) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

3. Giải và biện luận phương trình lượng giác $\tan x = m \quad (c)$

Bước 1: Đặt điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Xét 2 khả năng

- Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tan của góc đặc biệt , giả sử α khi đó phương trình có dạng

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

- Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tan của góc đặc biệt , khi đó ta được

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm

4. Giải và biện luận phương trình lượng giác $\cot x = m \quad (d)$

Bước1: Đặt điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Xét 2 khả năng

-Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cot của góc đặc biệt , giả sử α khi đó phương trình có dạng

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

-Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cot của góc đặc biệt , khi đó ta được

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình (d) luôn có nghiệm.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Các phương trình lượng giác cơ bản.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$a)\sin x = \sin\dfrac{\pi}{12}$ $\qquad b)\sin 2x = -\sin 36^0$ $\qquad c)\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad d)\sin x = \dfrac{2}{3}$

Giải

$$a)\sin x = \sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$b)\sin 2x = -\sin 36^0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-36^0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -36^0 + k360^0 \\ 2x = 180^0 - \left(-36^0\right) + k360^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -36^0 + k360^0 \\ 2x = 216^0 + k360^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -18^0 + k180^0 \\ x = 108^0 + k180^0 \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$c)\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$d)\sin x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\\ x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

$a)\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ $b)\cos\left(x+45^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $c)\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$ $d)\cos x=\frac{3}{4}$

Giải

$$a)\cos x=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$b)\cos\left(x+45^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+45^0\right)=\cos 45^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+45^0=45^0+k360^0\\ x+45^0=-45^0+k360^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=45^0+k360^0\\ x=-90^0+k360^0\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$c)\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos 4x=\cos\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$d)\cos x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{3}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$a)\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ $b)\tan 4x=-\frac{1}{3}$ $c)\tan\left(4x-20^0\right)=\sqrt{3}$

Giải

$$a)\tan x=\tan\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$b)\tan 4x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 4x=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+k\frac{\pi}{4},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$c)\tan\left(4x-20^0\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan\left(4x-20^0\right)=\tan 60^0\Leftrightarrow 4x-20^0=60^0+k180^0\Leftrightarrow 4x=80^0+k180^0$$

$$\Leftrightarrow x=20^0+k45^0,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$a)\cot 3x=\cot\frac{3\pi}{7}$ $b)\cot 4x=-3$ $c)\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Giải

$$a)\cot 3x=\cot\frac{3\pi}{7}\Leftrightarrow 3x=\frac{3\pi}{7}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{7}+k\frac{\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$$

$$b)\cot 4x=-3\Leftrightarrow 4x=\arctan(-3)+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\arctan(-3)+k\frac{\pi}{4},(k\in\mathbb{Z})$$

$$c)\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$$

II. Một số phương trình lượng giác thường gặp.

2.1- Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng 1: $a\sin^2 x+b\sin x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ (1)

Cách giải: Đặt $t=\sin x$, điều kiện $|t|\le 1$

Đưa phương trình (1) về phương trình bậc hai theo t , giải tìm t chú ý kết hợp với điều kiện rồi giải tìm x

Dạng 2: $a\cos^2 x+b\cos x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ (2)

Cách giải: Đặt $t=\cos x$ điều kiện $|t|\le 1$ ta cũng đưa phương trình (2) về phương trình bậc hai theo t, giải tìm t rồi tìm x

Dạng 3: $a\tan^2 x+b\tan x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ (3)

Cách giải: Điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad ,k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\tan x\quad (t\in\mathbb{R})$ ta đưa phương trình (3) về phương trình bậc hai theo t, chú ý khi tìm được nghiệm x cần thay vào điều kiện xem thoả mãn hay không

Dạng 4: $a\cot^2 x+b\cot x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ (4)

Cách giải: Điều kiện $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\cot x\quad (t\in\mathbb{R})$. Ta cũng đưa phương trình (4) về phương trình bậc hai theo ẩn t.

Bài tập minh họa:

Bài tập 1: Giải phương trình $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1)

Giải: Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (2)

Giải: Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2} \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad (*)$$

Ta thấy $\cos 2x = 1$ không thoả mãn điều kiện. Do đó

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

2.2- Phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$

a) Định nghĩa: Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ (1) trong đó a, b, c$\in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 > 0$ được gọi là phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$

b) Cách giải. Ta có thể lựa chọn 1 trong 2 cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Kiểm tra

-Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm

-Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ khi đó để tìm nghiệm của phương trình ta thực hiện tiếp bước 2

Bước 2: Chia cả 2 vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ Vì $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$ nên tồn tại góc α sao cho $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$

Khi đó phương trình (1) có dạng $\sin x.\cos\alpha+\sin\alpha.\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đây là phương trình cơ bản của sin mà ta đã biết cách giải

Cách 2: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Với $\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ thử vào phương trình (1) xem có là nghiệm hay không?

Bước 2: Với $\cos\frac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pi+k2\pi\quad(k\in Z)$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$ suy ra $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Khi đó phương trình (1) có dạng $a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c\Leftrightarrow(c+b)t^2-2at+c-b=0\quad(2)$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t , sau đó giải tìm x.

*** Dạng đặc biệt:**

- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Chú ý: Từ cách 1 ta có kết quả sau

$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$ từ kết quả đó ta có thể áp dụng tìm GTLN và GTNN của các hàm số có dạng $y=a\sin x+b\cos x$, $y=\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác .

Ví Dụ minh hoạ:

Ví Dụ 1: Giải phương trình: $\sin 2x - 3\cos 2x = 3 \quad (1)$

Giải :Cách 1: Chia cả hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\frac{3}{\sqrt{10}} = \sin\alpha, \ \frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\alpha$. Lúc đó phương trình (1) viết được dưới dạng

$$\cos\alpha\sin 2x - \sin\alpha\cos 2x = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin(2x-\alpha) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\alpha = \alpha + k2\pi \\ 2x-\alpha = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm

Cách 2:-Ta nhận thấy $\cos x = 0$ là nghiệm của phương trình

-Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$. Đặt $t = \tan x$,lúc đó $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Phương trình (1) sẽ có dạng $\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \Leftrightarrow 2t - 3(1-t^2) = 3(1+t^2) \Leftrightarrow t = 3$

Hay $\tan x = 3 = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm

Cách 3: Biến đổi phương trình về dạng

$$\sin 2x = 3(1+\cos 2x) \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = 6\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 3\cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x - 3\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 3 = \tan\alpha \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Chú ý: Khi làm bài toán dạng này chúng ta nên kiểm tra điều kiện trước khi bắt tay vào giải phương trình bởi có một số bài toán đã cố tình tạo ra những phương trình không thoả mãn điều kiện. Ta xét ví dụ sau:

Ví Dụ 2: Giải phương trình $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x \qquad (2)$

Giải:

Ta biến đổi phương trình (2)

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1+\cos 2x) = 3 + \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2}-1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

$a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{2}-1$; $c = 3-\sqrt{2} a^2 + b^2 = 2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 5 - 2\sqrt{2}$

$c^2 = (3-\sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

Suy ra $a^2 + b^2 < c^2$ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm .

Ngoài ra chúng ta cần lưu ý rằng việc biến đổi lượng giác cho phù hợp với từng bài toán sẽ biểu diễn chẵn các họ nghiệm . Ta xét ví dụ sau

Ví Dụ 3: Giải phương trình: $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$ (4)

Giải:

(4)$\Leftrightarrow$

$$\cos 7x + \sqrt{3}\sin 7x = \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 7x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 7x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x \quad \Leftrightarrow \cos(7x - \frac{\pi}{3}) = \cos(5x - \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{3} = 5x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 7x - \frac{\pi}{3} = \pi - (5x - \frac{\pi}{6}) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 12x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{6} \end{array}\right. \quad k \in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

2.3- Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

a) **Định nghĩa:** Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$,$\cos x$ là phương trình.

$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$ (1) trong đó a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

b) Cách giải :

Chia từng vế của phương trình (1) cho một trong ba hạng tử $\sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $\sin x.\cos x$. Chẳng hạn nếu chia cho $\cos^2 x$ ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,$k \in \mathbb{Z}$ xem nó có phải là nghiệm của phương trình(1) hay không?

Bước 2: Với $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ lúc đó phương trình (1) trở thành

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow (a-d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0$$

Đây là phương trình bậc hai theo tan ta đã biết cách giải.

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x.\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

đưa phương trình đã cho về phương trình $\quad b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = d - c - a$

Đây là phương trình bậc nhất đối với sin và cos ta đã biết cách giải

***Chú ý:** Đối với phương trình đẳng cấp bậc n ($n \geq 3$) với dạng tổng quát

$A(\sin^n x, \cos^n x, \sin^k x \cos^h x) = 0$ trong đó $k + h = n;\ \ k, h, n \in \mathbb{N}$

Khi đó ta cũng làm theo 2 bước :

Bước 1: Kiểm tra xem $\cos x = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không?

Bước 2: Nếu $\cos x \neq 0$.Chia cả hai vế của phương trình trên cho $\cos^n x$ ta sẽ được phương trình bậc n theo $\tan$. Giải phương trình này ta được nghiệm của phương trình ban đầu.

Ví Dụ Minh Hoạ:

Ví Dụ 1: Giải phương trình : $2\sqrt{3}\cos^2 x + 6\sin x.\cos x = 3 + \sqrt{3}$ (1)

Giải: Cách 1: Phương trình

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3}(1+\cos 2x) + 3\sin 2x = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: +) Thử với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ vào phương trình (1) ta có $0 = 3 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ vô lí.Vậy $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phươngtrình.

+)Với $\cos x \neq 0$ Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2\sqrt{3}+6\tan x=(3+\sqrt{3})(1+\tan^2 x)\Leftrightarrow(3+\sqrt{3})\tan^2 x-6\tan x+3-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\tan\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\alpha+k\pi\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

*** Chú ý:** Không phải phương trình nào cũng ở dạng thuần nhất ta phải thực hiện

một số phép biến đổi thích hợp

Ví Dụ 2: Giải phương trình: $\sin^3(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin x$ (2)

Giải : Ta nhận thấy $\sin(x-\frac{\pi}{4})$ có thể biểu diễn được qua $\sin x-\cos x$. Luỹ thừa bậc ba biểu thức

$\sin x-\cos x$

ta sẽ đưa phương trình về dạng thuần nhất đã biết cách giải

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^3(x-\frac{\pi}{4})=4\sin x\Leftrightarrow\left[\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]^3=4\sin x$

$$\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)^3=4\sin x$$

+) Xét với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\quad k\in\mathbb{Z}$. Khi đó phương trình có dạng

$\Leftrightarrow\sin^3(\frac{\pi}{2}+k\pi)=4\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)\Rightarrow$ mâu thuẫn Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ làm nghiệm

+) Với $\cos x\neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình (2) cho $\cos^3 x$ ta được :

$$(\tan x-1)^3=4(1+\tan^2 x)\tan x\Leftrightarrow 3\tan^3 x+3\tan^2 x+\tan x-1=0.$$

Đặt $t=\tan x$ phương trình có được đưa về dạng:

$$3t^3+3t^2+t-1=0\Leftrightarrow(t+1)(3t^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Họ nghiệm trên thoả mãn điều kiện của phương trình .Vậy phương trình có duy nhất 1 họ nghiệm

***Chú ý:** Ngoài phương pháp giải phương trình thuần nhất đã nêu ở trên có những phương trình có thể giải bằng phương pháp khác tuỳ thuộc vào từng bài toán để giải sao cho cách giải nhanh nhất ,khoa học nhất.

Ví Dụ 3: Giải phương trình: $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=1+\sin 2x$ (3)

Giải :

Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng : $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\left(\cos x+\sin x\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos x-\sin x=\left(\cos x+\sin x\right)^3$

Chia cả hai vế của phương trình (3) cho $\cos^3 x\neq 0$ ta được :

$$1+\tan^2 x-\left(1+\tan^2 x\right)\tan x=\left(1+\tan x\right)^3\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x+2\tan x=0\Leftrightarrow\left(\tan^2 x+\tan x+2\right)\tan x=0\ (*)$$

(do $\tan^2 x+\tan x+2=0$ vô nghiệm) nên:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ Vậy phương trình có một họ nghiệm

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\left(\cos x+\sin x\right)^2\Leftrightarrow\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cot(x+\frac{\pi}{4})=\frac{2}{1+\cot^2(x+\frac{\pi}{4})}$$

Đặt $t=\cot(x+\frac{\pi}{4})$ ta được :

$$t=\frac{2}{1+t^2}\Leftrightarrow t^3+t-2=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\,hay\ \cot(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm

2.4-Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$.

a) Định nghĩa: Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình dạng

$a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}$ (1)

b) Cách giải:

Cách 1: Do $a(\sin x+cosx)^2=1+\sin x\cos x$ nên ta đặt

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)$. Điều kiện $|t|\leq\sqrt{2}$

Suy ra $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$ và phương trình (1) được viết lại: $bt^2+2at-(b+2c)=0$

Đó là phương trình bậc hai đã biết cách giải

Cách 2: Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x$ thì $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\sqrt{2}\cos t$

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{1}{2}\cos 2t=\cos^2 t-\frac{1}{2}$ nên phương trình (1) trở thành

$b\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x-\frac{b}{2}+c=0$. Đây là phương trình bậc hai đã biết cách giải

***Chú ý:** Hai cách giải trên có thể áp dụng cho phương trình $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ bằng cách đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow$ $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

Ví Dụ Minh Hoạ :

Ví Dụ 1: Giải phương trình $\sin x+\cos x-2\sin x\cos x+1=0$ (1)

Giải:

Cách 1: Đặt $\sin x+\cos x=t$ điều kiện $|t|\leq\sqrt{2}$. Lúc đó $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó phương trình (1) sẽ có dạng $t-2(\frac{t^2-1}{2})+1=0\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$ (*)

Với $t=2$ không thoả mãn điều kiện nên

$(*) \Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

Cách 2: Đặt $z=\frac{\pi}{4}-x$. Khi đó phương trình có dạng

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)-\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-\sin 2(\frac{\pi}{4}-z)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-\sin(\frac{\pi}{2}-z)+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-\cos 2z+2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-(2\cos^2 z-1)+1=0 \Leftrightarrow -2\cos^2 z+\sqrt{2}\cos z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos z=\sqrt{2} \\ \cos z=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \quad (*')$$

Ta thấy $\cos z=\sqrt{2}$ không thoả mãn

Do đó $(*') \Leftrightarrow \cos z=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ z=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}-x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ \frac{\pi}{4}-x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}-k2\pi \\ x=\pi-k2\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Ví Dụ 3: Giải phương trình $\tan x-\sqrt{3}\cot x-\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-\sqrt{3}=0 \quad (3)$

Giải:Điều kiện $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2} \quad k\in\mathbb{Z}$

$(3) \Leftrightarrow \tan x-\sin x-\sqrt{3}(\cot x-\cos x)+1-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}(\sin x-\sin x\cos x+\cos x)-\frac{\sqrt{3}}{\sin x}(\sin x-\sin x.\cos x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{\cos x}-\frac{\sqrt{3}}{\sin x})(\sin x-\sin x.\cos x+\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{\cos x}-\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=0 & (4) \\ \sin x-\sin x.\cos x+\cos x=0 & (5) \end{array}\right.$$

Giải $(4) \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Giải (5): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4} - x) \quad |t| \le \sqrt{2}$ (*)Suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Phương trình (5) trở thành $t - \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) thì $t = 1 + \sqrt{2}$ bị loại

Với $t = 1 - \sqrt{2}$ ta có $\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4} - x) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(\dfrac{\pi}{4} - x) = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \pm\alpha + l2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + l2\pi \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}$$

Các nghiệm của phương trình (4) và (5) đều thoả mãn điều kiện của phương trình

Ví Dụ 3: Giải phương trình: $8\dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin 2x} = \tan^2 x + \cot^2 x \qquad (2)$

Giải: Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$ **. *Phương trình***

(2) $\Leftrightarrow 8(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x) = 2\sin 2x(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) \Leftrightarrow 8 - 6\sin^2 2x = 4\sin 2x.\dfrac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin^2 2x}$

$$\Leftrightarrow (8 - 6\sin^2 2x)\sin 2x = 4 - 2\sin^2 2x \Leftrightarrow 3\sin^3 2x - \sin^2 2x - 4\sin 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(3\sin^2 2x + 2\sin 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x - 1 = 0 \\ 3\sin^2 2x + 2\sin 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3} \quad (\text{loại}) \\ \sin 2x = \dfrac{\sqrt{7} - 1}{3} = \sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \\ x = \pi - \alpha + k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Các nghiệm đều thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq 0$

D. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. $\left\{x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$ <u>B.</u> $\tan x=1$ C. $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cot x=\sqrt{3}$

Câu 2. Phương trình $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan 3x$ có các nghiệm là:

A. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ B. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ C. $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
<u>D.</u> $x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Câu 3: Phương trình: $\sin\left(\dfrac{2x}{3}-60^0\right)=0$ có nhghiệm là:

A. $x=\pm\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{k3\pi}{2}$ **B.** $x=k\pi$ **C.** $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ **<u>D.</u>** $x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k3\pi}{2}$

Câu 4: Nghiệm của phương trình: sin x + cos x = 1 là:

A. $x=k2\pi$ **<u>B.</u>** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ **C.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

Câu 5: Giải phương trình lượng giác: $2\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}=0$ có nghiệm là:

A. $x=\pm\dfrac{5\pi}{3}+k2\pi$ **B.** $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k4\pi$ **<u>D.</u>** $x=\pm\dfrac{5\pi}{3}+k4\pi$

Câu 6: Điều kiện để phương trình $3\sin x+m\cos x=5$ vô nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m\ge 4\end{array}\right.$ **B.** $m>4$ **C.** $m<-4$ **<u>D.</u>** $-4<m<4$

Câu7: Phương trình lượng giác: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$ có nghiệm là:

A. $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ **B.** Vô nghiệm **<u>C.</u>** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Câu 8: Điều kiện để phương trình $m.\sin x-3\cos x=5$ có nghiệm là:

A. $m \geq 4$ **B.** $-4 \leq m \leq 4$ **C.** $m \geq \sqrt{34}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{array}\right.$

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\sin 3x - \cos x = 0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sin\left(\pi \cos x\right) = 1$ là:

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Các nghiệm của phương trình $\sin x - \cos 2x - 2 = 0$ là:

A. $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\cos(3x + \pi) = 1$ trên khoảng $\left(-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $-\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $-\dfrac{\pi}{3}$ C. $\dfrac{\pi}{4}$ D. $\dfrac{2\pi}{3}$

Câu 11. Phương trình $3 + 2\sin x \sin 3x = 3\cos 2x$ là:

A. $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 12. Các nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right) = \dfrac{1}{2}\cos 2x$ là:

A. $\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $-\dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 13: Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{6}$ **B.** $x = \dfrac{\pi}{2}$ **C.** $x = \dfrac{3\pi}{2}$ **D.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Câu 14: Nghiệm của phương trình lượng giác: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thõa điều kiện $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{3}$ **B.** $x = \dfrac{\pi}{2}$ **C.** $x = \dfrac{\pi}{6}$ **D.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Câu 15: Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$ **B.** $3\sin x - 4\cos x = 5$

C. $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -3$

Câu 16. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

A. 1 B. 2 **C.** 0 D. 3

Câu 17: Số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \le x \le 5\pi$ là:

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 18: Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \le x \le 2\pi$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 19: Nghiệm của phương trình lượng giác: $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{2}$ **B.** x = 0 **C.** $x = \pi$ **D.** $x = \dfrac{-\pi}{2}$

Câu 20: Phương trình: $\sqrt{3}.\sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây:

A. $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ **B.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ **C.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ **D.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

Câu 21: Tìm m để pt $\sin 2x + \cos^2 x = \dfrac{m}{2}$ có nghiệm là:

A. $1 - \sqrt{5} \le m \le 1 + \sqrt{5}$ **B.** $1 - \sqrt{3} \le m \le 1 + \sqrt{3}$ **C.** $1 - \sqrt{2} \le m \le 1 + \sqrt{2}$ **D.** $0 \le m \le 2$

Câu 22: Nghiệm dương nhỏ nhất của pt (2sinx – cosx) (1+ cosx) = $\sin^2 x$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{6}$ **B.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$ **C.** $x = \pi$ **D.** $\dfrac{\pi}{12}$

Câu 23: Tìm m để pt $2\sin^2 x + m.\sin 2x = 2m$ vô nghiệm:

A. $0 < m < \frac{4}{3}$ **B.** $0 \le m \le \frac{4}{3}$ **C.** $m \le 0; m \ge \frac{4}{3}$ **D.** $m < 0$; $m \ge \frac{4}{3}$

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là:

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 25: Nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ của pt sin4x + cos5x = 0 theo thứ tự là:

A. $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{\pi}{6}$

B. $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{2\pi}{9}$

C. $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{\pi}{2}$

D. $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{\pi}{3}$

KIỂM TRA CUỐI CHUYÊN ĐỀ LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ		Mức độ nhận thức				TỔNG
		Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao	
Cung và góc lượng giác. Giá trị lượng giác của một cung. Công thức lượng giác (3)	Số câu	2	3	2	1	**8**
	Số điểm	0.8	1.2	0.8	0.4	**3.2**
Hàm số lượng giác (2)	Số câu	2	1	1	1	**5**
	Số điểm	0.8	0.4	0.4	0.4	**2**
Phương trình lượng giác cơ bản và thường gặp (4)	Số câu	4	3	3	2	**12**
	Số điểm	1.6	1.2	1.2	0.8	**4.8**
CỘNG	Số câu	**8**	**7**	**6**	**4**	**25**
	Số điểm	**3.2**	**2.8**	**2.4**	**1.6**	**10**

Câu 1: Khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác nào trong các cung lượng giác có số đo dưới đây có cùng ngọn cung với cung lượng giác có số đo 4200^0.

A. 130^0. **B.** 120^0. **C.** -120^0. **D.** 420^0.

Câu 2: Biểu thức $\sin^2 x.\tan^2 x+4\sin^2 x-\tan^2 x+3\cos^2 x$ không phụ thuộc vào x và có giá trị bằng :

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3: Trên đường tròn định hướng góc A có bao nhiêu điểm M thỏa mãn sđ $\overset{\frown}{AM}=30^0+k45^0, k\in\mathbb{Z}$?

A. 6 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 10

Câu 4: Kết quả rút gọn của biểu thức $\left(\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+1}\right)^2+1$ bằng:

A. 2 **B.** 1 + tanα **C.** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **D.** $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Câu 5: Giả sử $A = \tan x.\tan(\frac{\pi}{3} - x)\tan(\frac{\pi}{3} + x)$ được rút gọn thành $A = \tan nx$. Khi đó *n* bằng :

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 6: Tính $B = \frac{1+5\cos\alpha}{3-2\cos\alpha}$, biết $\tan\frac{\alpha}{2} = 2$.

A. $-\frac{2}{21}$ **B.** $\frac{20}{9}$ **C.** $\frac{2}{21}$ **D.** $-\frac{10}{21}$

Câu 7: Ta có $\sin^4 x = \frac{a}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{b}{8}\cos 4x$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó tổng $a+b$ bằng :

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Nếu tanα và tanβ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ và cotα và cotβ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì *rs* bằng:

A. pq **B.** $\frac{1}{pq}$ **C.** $\frac{p}{q^2}$ **D.** $\frac{q}{p^2}$

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x}$ là?

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ B. $D = \mathbb{R}$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Câu 10. Khẳng định nào sau đây là **SAI**?

A. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0;\pi]$.

B. Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

C. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

D. Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 12. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên R?

A. y = x.cos2x. B. y = $(x^2 + 1)$.sinx. C. y = $\frac{\cos x}{1+x^2}$. D. $y = \frac{\tan x}{1+x^2}$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$ và 2. B. 2 và 4. C. $4\sqrt{2}$ và 8. D. $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Câu 14. Gọi S là tập giá trị của hàm số $y=\frac{\sin^2 x}{2}+3-\frac{3}{4}\cos 2x$. Khi đó tổng các giá trị nguyên của S là:

A. 3. B. 4. C. 6 . D. 7.

Câu 15. Cho biết $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ là họ nghiệm của phương trình nào sau đây ?

A) $2\sin x-\sqrt{3}=0$ B) $2\sin x+\sqrt{3}=0$

C) $2\cos x-\sqrt{3}=0$ D) $2\cos x+\sqrt{3}=0$

Câu 16. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm

A. 3sinx – 5 = 0 B. 2cos3x – 1 = 0 C. 2cosx + 5 = 0 D . sin3x + 2 = 0

Câu 17. Nghiệm dương bé nhất của phương trình : $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$ là :

A. $x=\frac{\pi}{6}$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}$ **C.** $x=\frac{3\pi}{2}$ **D.** $x=\frac{5\pi}{6}$

Câu 18. Phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ B. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ C. $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ D. $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

Câu 19. Phương trình $2\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=k\pi$ B. $x=k\pi \vee x=k2\pi$

C. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi \vee x=k\frac{\pi}{2}$ D. Đáp án khác.

Câu 20. Phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=3\tan x+\sqrt{3}$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ B. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

C. $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ D. $x=\frac{-\pi}{2}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Câu 21. Phương trình cos2x – 7cosx - 3 = 0 có nghiệm là

A). $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ B). $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

C). $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi$ D). $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

Câu 22. Phương trình $6\sin^2 x+7\sqrt{3}\sin 2x-8\cos^2 x=6$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Câu 23. Phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = 2\cos 2x - 1$.

A) $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ B) $x=\pi+k2\pi$ C) $x=k\pi$ D) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Câu 24. Phương trình $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 8x\right)$ có các họ nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{7} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{5}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{7}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Câu 25. Cho phương trình $\cos 5x\cos x=\cos 4x\cos 2x+3\cos^2 x+1$. Các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ của phương trình là:

A. $-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ C. $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$
