CHỦ ĐỀ 1+2. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Tính đơn điệu của hàm số

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.
   - Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
   - Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. ***Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
   - Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
   - Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

3. ***Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
   - Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.
   - Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.
   - Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

Chú ý.

- Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết " Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

4. Kĩ năng cơ bản

4.1. Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$

Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.

Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước 3. Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

4.2 . Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1. Tìm tập xác định D.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên.

Bước 5. Kết luận.

4.3. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ cho trước.

Cho hàm số $y = f(x,m)$ có tập xác định D, khoảng $(a;b) \subset D$:

- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$

- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$

Chú ý: Riêng hàm số $y = \dfrac{a_1x + b_1}{cx + d}$ thì :

- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (a;b)$
- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (a;b)$

* Nhắc lại một số kiến thức liên quan:

Cho tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

a) $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ b) $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

c) $g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ d) $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu gặp bài toán tìm *m* để hàm số đồng biến (*hoặc nghịch biến*) trên khoảng $(a;b)$:

- ✓ *Bước 1*: Đưa bất phương trình $f'(x) \geq 0$ (*hoặc* $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a;b)$ về dạng $g(x) \geq h(m)$ (hoặc $g(x) \leq h(m)$), $\forall x \in (a;b)$.
- ✓ *Bước 2*: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(a;b)$.
- ✓ *Bước 3*: Từ bảng biến thiên và các điều kiện thích hợp ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số *m*.

B. Cực trị của hàm số

1. *Định nghĩa:* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

2. *Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:* Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$

Chú ý.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại (cực tiểu)** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

3. Kĩ năng cơ bản

3.1.Quy tắc tìm cực trị của hàm số

- **Quy tắc 1:**

  Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

  Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

  Bước 3. Lập bảng biến thiên.

  Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

- **Quy tắc 2:**

  Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

  Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i $(i=1,2,3,...)$ là các nghiệm của nó.

  Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

  Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

3.2. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2-3ac>0$. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là : $y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.
- Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3+bx^2+cx+d-\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{b}{9a}\right)\xrightarrow{x=i}Ai+B\Rightarrow y=Ax+B$$

  Hoặc sử dụng công thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$.

- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$$AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}\quad \text{với}\quad e=\frac{b^2-3ac}{9a}$$

3.3. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương.

Cho hàm số: $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị là (C).

$$y'=4ax^3+2bx;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-\dfrac{b}{2a}\end{array}\right.$$

(C) có ba điểm cực trị $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}>0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta=b^2-4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Các kết quả cần ghi nhớ:

- ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 1 = 0$$

- ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 3 = 0$$

- $\widehat{BAC} = \alpha$, ta có: $\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}$
- Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $r = \dfrac{\frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}}{\sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} + \sqrt{-\frac{b}{2a}}} = \dfrac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$
- Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$

II. LUYỆN TẬP

A. Tính đơn điệu của hàm số

Bài 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1/ $y = x^4 + 8x^2 + 5$;

2/ $y = \frac{2x - 3}{4 - x}$

3/ $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$;

4/ $y = \sqrt{25 - x^2}$

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ (1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

HD giải. *Tập xác định: D = R.* $y' = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$.

(1) đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow m \geq 2$

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ (1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

HD giải. *Tập xác định: D = R.* $y' = 3x^2 + 6x - m$. *y' có* $\Delta' = 3(m+3)$.

+ Nếu $m \leq -3$ *thì* $\Delta' \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \Rightarrow$ *hàm số đồng biến trên R* $\Rightarrow m \leq -3$ *thoả YCBT.*

+ Nếu $m > -3$ *thì* $\Delta' > 0 \Rightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. *Khi đó hàm số đồng biến trên các khoảng* $(-\infty; x_1), (x_2; +\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0) \Leftrightarrow 0 \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ -m \ge 0 \\ -2 > 0 \end{cases}$ *(VN)*

Vậy: $m \le -3$.

Bài 4: Cho hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$ (1).

Tìm các giá trị của *m* để hàm số (1) đồng biến trong khoảng $(x_1;x_2)$ với $x_2 - x_1 = 1$.

HD giải. $y' = -6x^2 + 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = m$.

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *hàm số nghịch biến trên* $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ *không thoả YCBT.*

+ Nếu $m \ne 0$, $y' \ge 0, \forall x \in (0;m)$ *khi* $m > 0$ *hoặc* $y' \ge 0, \forall x \in (m;0)$ *khi* $m < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(x_1;x_2)$ *với* $x_2 - x_1 = 1$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x_1;x_2) = (0;m) \\ (x_1;x_2) = (m;0) \end{array}\right.$ *và* $x_2 - x_1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 0 = 1 \\ 0 - m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 1$

B. Cực trị của hàm số

Bài 1: Tìm cực trị của các hàm số:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

2) $y = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 - 1$

3) $y = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$

4) $y = \frac{2x+7}{4x+3}$

5) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

6) $y = \frac{x+3}{x-4}$

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1) $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại x = 2

2) $y = \frac{x^2 - mx + m - 1}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 1

3) $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 2

4) $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + m$ đạt cực tiểu tại x = 2

5) $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-2)x^2 + (2-m)x + 2$ đạt cực đại tại x = –1

Bài 3: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$.

Tìm *m* để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

HD giải. *Ta có:* $y' = 6(x-1)(x-m)$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m \ne 1$.

Khi đó các điểm cực trị là $A(1;m^3 + 3m - 1), B(m;3m^2)$.

$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 + (3m^2 - m^3 - 3m + 1) = 2 \Leftrightarrow m = 0; m = 2$ *(thoả điều kiện).*

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực.

Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

HD giải. *Ta có* $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$.

+ Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ *PT* $x^2-2(m+1)x+3=0$ *có hai nghiệm phân biệt là* x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (1)

+ *Theo định lý Viet ta có* $x_1+x_2=2(m+1);\ x_1x_2=3$. *Khi đó:*

$|x_1-x_2|\le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2-12\le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2\le 4 \Leftrightarrow -3\le m\le 1$ *(2)*

+ *Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m cần tìm là* $-3\le m<-1-\sqrt{3}$ *và* $-1+\sqrt{3}<m\le 1$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+10$ và các khoảng sau:

(I): $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$; (II): $\left(-\sqrt{2};0\right)$; (III): $\left(0;\sqrt{2}\right)$;

Hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. Chỉ (I). **B**. (I) và (II). **C**. (II) và (III). **D**. (I) và (III).

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 5. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$. **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\dfrac{4}{5}x^5+\dfrac{4}{3}x^3-x$. **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 6. Hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 7. Hàm số $y=\dfrac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\le 0 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\ge 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a<0; b^2-3ac\le 0 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} a=b=c=0 \\ a<0; b^2-3ac<0 \end{array}\right.$.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 10. Tìm điều kiện để hàm số $y=ax^4+bx^2+c \quad (a\ne 0)$ có 3 điểm cực trị .

A. $ab<0$. **B.** $ab>0$. **C.** $b=0$. **D.** $c=0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị. **D.** Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Câu 14. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $y=x-2$. **B.** $y=2x-1$.

C. $y=-2x+1$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 15. Gọi M,n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$. Tính giá trị của biểu thức M^2-2n ?

A. $M^2-2n=8$. **B.** $M^2-2n=7$. **C.** $M^2-2n=9$. **D.** $M^2-2n=6$.

Câu 16. Cho hàm số $y=x^3+17x^2-24x+8$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_{CD}=1$. **B.** $x_{CD}=\dfrac{2}{3}$. **C.** $x_{CD}=-3$. **D.** $x_{CD}=-12$.

Câu 17. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=-2$. **B.** $y_{CD}=1$. **C.** $y_{CD}=-1$. **D.** $y_{CD}=2$.

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x=\dfrac{3}{2}$?

A. $y=\dfrac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3x$. **B.** $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$.

C. $y=\sqrt{4x^2-12x-8}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7$. **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5$.

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+4x-7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1,x_2. Tính x_1+x_2 ?

A. $x_1+x_2=-6$. **B.** $x_1+x_2=-4$. **C.** $x_1+x_2=6$. **D.** $x_1+x_2=4$.

Câu 21. Tính hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

D. -4. **B.** -2. **C.** 2. **A.** 4.

Câu 22. Xác định hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Biết đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$.

A. $y=2x^3-3x^2$. **B.** $y=-2x^3-3x^2$.

C. $y=x^3+3x^2+3x$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 23. Hàm số nào dưới đây có cực trị?

A. $y=x^4+1$. **B.** $y=x^3+x^2+2x-1$.

C. $y=2x-1$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Câu 24. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-(3m-1)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \pm\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = \pm\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m = 1$.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	D	B	C	D	D	B	A	A	D	A	B	A	A	D	B	B	B	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	C	C	A	B															

Chủ đề 3+4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ VÀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

  Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

  Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$

2. Kĩ năng cơ bản

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K (K có thể là khoảng, đoạn, nửa khoảng, ...)

2.1 Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sử dụng bảng biến thiên

✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.

✓ ***Bước 2.*** Tìm các nghiệm của $f'(x)$ và các điểm $f'(x)$ trên K.

✓ ***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên K.

✓ ***Bước 4.*** Căn cứ vào bảng biến thiên kết luận $\min\limits_{K} f(x), \max\limits_{K} f(x)$

2.2 Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số không sử dụng bảng biến thiên

❖ **Trường hợp 1.** Tập K là đoạn $[a;b]$

✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.

- ✓ ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in [a;b]$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in [a;b]$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ✓ ***Bước 3.*** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- ✓ ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❖ **Trường hợp 2.** Tập K là khoảng $(a;b)$

- ✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ✓ ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ✓ ***Bước 3.*** Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- ✓ ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

✍ ***Chú ý:*** *Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

B. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Đường tiệm cận ngang

- *Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường* ***tiệm cận ngang*** *(hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0, \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$$

- **Nhận xét**: Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

- *Đường thẳng $x=x_0$ là đường* ***tiệm cận đứng*** *(hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty, \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty.$$

Ngoài ra cần nhớ các kiến thức về giới hạn sau:

3) Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	*Dấu của* $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
0	$\pm\infty$	*Tùy ý*	*0*
$L>0$	*0*	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L<0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

+) Nếu $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

+) Nếu $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$

II. LUYỆN TẬP

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = f\left(x\right) = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

b/ $y = f\left(x\right) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

c/ $y = f\left(x\right) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

d/ $y = f\left(x\right) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

HD giải. a/ Tìm max – min của hàm số: $y = f\left(x\right) = 3x^3 - x^2 - 7x + 1 \text{ trên } \left[0;2\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[0;2\right]$.

✧ Ta có: $y' = f'\left(x\right) = 9x^2 - 2x - 7 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 \in \left[0;2\right] & \left(N\right) \\ x = -\dfrac{7}{9} \notin \left[0;2\right] & \left(L\right) \end{array}\right.$

✧ Tính

$f(0) = 1; f(2) = -9; f(1) = -6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f(x) = 1 \text{ khi } x = 0 \\ \min\limits_{[0;2]} f(x) = -9 \text{ khi } x = 2 \end{cases}$$

b/ Tìm max – min của hàm số: $y = f\left(x\right) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9 \text{ trên } \left[1;3\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[1;3\right]$.

✧ Ta có:

$$y' = f'\left(x\right) = 3x^2 - 16x + 16 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 \notin \left[1;3\right] & \left(L\right) \\ x = \dfrac{4}{3} \in \left[1;3\right] & \left(N\right) \end{array}\right.$$

✧ Tính:

$f(1) = 0; f(3) = -6; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{27} \text{ khi } x = \frac{4}{3} \\ \min\limits_{[1;3]} f(x) = -6 \text{ khi } x = 3 \end{cases}$$

c/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = f\left(x\right) = -2x^4 + 4x^2 + 3 \text{ trên } \left[0;2\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[0;2\right]$.

✧ Ta có: $y' = f'\left(x\right) = -8x^3 + 8x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 \in \left[0;2\right] & (N) \\ x = -1 \notin \left[0;2\right] & (L) \\ x = 1 \in \left[0;2\right] & (N) \end{array}\right.$.

✧ Tính:

$f\left(0\right) = 3; f\left(2\right) = -13; f\left(1\right) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f\left(x\right) = 5 \quad \text{ khi } x = 1 \\ \min\limits_{[0;2]} f\left(x\right) = -13 \text{ khi } x = 2 \end{cases}$$

d/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = f\left(x\right) = 2x^3 - 6x^2 + 1 \text{ trên } \left[-1;1\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

✧ Ta có: $y' = f'\left(x\right) = 6x^2 - 12x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 \in \left[-1;1\right] & (N) \\ x = 2 \notin \left[-1;1\right] & (L) \end{array}\right.$.

✧ Tính:

$f\left(-1\right) = -7; f\left(1\right) = -3; f\left(0\right) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = 1 \quad \text{ khi } x = 0 \\ \min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = -7 \text{ khi } x = -1 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = x + \frac{4}{x}, \ \left(x > 0\right)$.

b/ $y = \frac{x-1}{x^2 - x + 1}$.

c/ $y = x - \frac{1}{x}, x \in \left(0;2\right]$.

d/ $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}, \ \left(x > 0\right)$.

HD giải. a/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = x + \frac{4}{x}, \ \left(x > 0\right)$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$.

* Ta có: $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}, \forall x \in \left(0;+\infty\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

* Bảng biến thiên:

x	-2	0		2		$+\infty$
y'	$+\quad 0$		$-$	0	$+$	
y			$\searrow$	4	$\nearrow$	

$*$ Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 4$ khi $x = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$

$*$ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

$*$ Ta có: $y' = \dfrac{-x^2 + 2x}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$*$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

$*$ Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 0$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 2$.

c/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = x - \dfrac{1}{x}, x \in \left(0;2\right]$

$*$ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(0;2\right]$.

$*$ Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \in \left(0;2\right]$.

$*$ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$*$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0		1		2	$+\infty$
y'	$+$	0		$-$	0	$+$		$+$
y			$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$		

$*$ Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{(0;2]} f(x) = 0$ khi $x = 1$.

d/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = \dfrac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$, $\left(x > 0\right)$

✧ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $\left(0,+\infty\right)$.

✧ Ta có: $y=f\left(x\right)=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\dfrac{9x^2+1-x^2}{\left(8x^2+1\right)\left(\sqrt{9x^2+1}-x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

✧ Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(0,+\infty\right)$ khi và chỉ khi hàm số:

$g\left(x\right)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0,+\infty\right)$.

✧ Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+1}=9x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\72x^2=1\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

✧ Vậy: $\min\limits_{(0;+\infty)} g(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\Rightarrow\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

Bài 3:

a/ Chu vi của một tam giác là $16\left(cm\right)$, độ dài của một cạnh tam giác là $6\left(cm\right)$. Tìm hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác có diện tích lớn nhất.

b/ Cho Parabol $(P):y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm $M\in(P)$ sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất. Tìm khoảng cách đó.

HD giải. a/ Gọi độ dài cạnh thứ nhất của tam giác là $x\left(cm\right)$, cạnh thứ hai có độ dài là $y\left(cm\right)$ và cạnh thứ ba là $6\left(cm\right)$.

✧ Theo đề bài ta có: $\begin{cases}x>0,\ y>0\\ Chu\ vi\ \Delta=2p=x+y+6=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=10-x;\ \forall x\in\left(0;10\right)\\ p=16\end{cases}$

✧ Công thức tính diện tích Δ theo Hêrông:

$S_\Delta\left(x\right)=\sqrt{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-6\right)}=\sqrt{8\left(8-x\right)\left(8-y\right)\left(8-6\right)}=4\sqrt{-x^2+10x-16}$.

✧ Ta có: $S'_\Delta=4.\dfrac{\left(5-x\right)}{\sqrt{-x^2+10x-16}}$; $\forall x\in\left(0;10\right)$.

$S'_\Delta=0\Leftrightarrow 4.\dfrac{\left(5-x\right)}{\sqrt{-x^2+10x-16}}\Leftrightarrow x=5;\ \forall x\in\left(0;10\right)$.

✧ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		5		10	$+\infty$
S'_Δ			$+$	0	$-$		
$S_\Delta(x)$			$\nearrow$	12	$\searrow$		

✧ Dựa vào bảng biến thiên: Max$S_\Delta=12\left(cm^2\right)$ khi mỗi cạnh còn lại dài $5\left(cm\right);\left(khi\ x=y=5\right)$.

b/Gọi $M\left(x_o;y_o\right)\in(P)\Rightarrow M\left(x_o;x_o^2\right)$.

✧ Khoảng cách: $AM = d\left(x_o\right) = \sqrt{\left(x_o + 3\right)^2 + \left(x_o^2\right)^2} = \sqrt{x_o^4 + x_o^2 + 6x_o + 9}$.

✧ Ta có: $d'\left(x_o\right) = \dfrac{2x_o^3 + x_o + 3}{\sqrt{x_o^4 + x_o^2 + 6x_o + 9}}$; $d'\left(x_o\right) = 0 \Leftrightarrow 2x_o^3 + x_o + 3 = 0 \Leftrightarrow x_o = -1$.

✧ Bảng biến thiên:

x_o	$-\infty$		-1		$+\infty$
$d'\left(x_o\right)$		$-$	0	$+$	
$AM = d\left(x_o\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: $AM_{\min} = \sqrt{5}$ khi điểm $M\left(-1;1\right) \in \left(P\right): y = x^2$.

II. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1) Tìm giới hạn theo quy tắc

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 2x)$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$).

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x.\dfrac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 2 > 0$)

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x - 3}{x - 1}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(x - 1) = 0$, $x - 1 > 0\ \forall x > 1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x - 3) = -1 < 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x - 3}{x - 1} = -\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x - 3}{x - 1}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x - 1) = 0$, $x - 1 < 0\ \forall x < 1$ và $\lim\limits_{x\to1^-}(2x - 3) = -1 < 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x - 3}{x - 1} = +\infty$.

2) Kĩ năng sử dụng máy tính

Ý tưởng: *Giả sử cần tính* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của* $f(x)$ *tại các giá trị của* x *rất gần* a.

a) Giới hạn của hàm số tại một điểm

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = a + 10^{-9}$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = a - 10^{-9}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = a + 10^{-9}$ *hoặc* $x = a - 10^{-9}$.

b) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = 10^{10}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = -10^{10}$.

Ví dụ 1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Giải. Nhập biểu thức $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$. Ấn tổ hợp phím: $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{1+10^{-9}}$ $\boxed{=}$. Máy hiện số 4.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = 4$.

Ví dụ 2. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải. Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$. Ấn tổ hợp phím: $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{1+10^{-9}}$ $\boxed{=}$.

Máy hiện số -999999998. Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$.

Ví dụ 3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Giải. Nhập biểu thức $\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$. Ấn tổ hợp phím: $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{10^{10}}$ $\boxed{=}$. Máy hiện số 2.

Vậy $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1} = 2$.

3) Dạng toán thường gặp: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp:

- Tìm TXĐ của hàm số.

- Tìm các giới hạn của hàm số khi $x \to +\infty, x \to -\infty, x \to x_0^+, x \to x_0^-$ *rồi dựa vào định nghĩa các đường tiệm cận để kết luận.*

Chú ý.

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận ngang khi TXĐ của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến x có thể dần tới $+\infty$ hoặc $-\infty$).
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận đứng khi TXĐ của nó có một trong các dạng sau $(a;b),[a;b),(a;b],(a;+\infty),(-\infty;a)$ hoặc là hợp của các tập hợp này và TXĐ không có một trong các dạng sau $\mathbb{R},[c;+\infty),(-\infty;c],[c;d]$.
- Đối với hàm phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

i) Tiệm cận đứng

Nếu $\begin{cases} P(x_0) \neq 0 \\ Q(x_0) = 0 \end{cases}$ thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

ii) Tiệm cận ngang

Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đường thẳng $y = \dfrac{A}{B}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $P(x)$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$.

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đặc biệt, mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồ thị đều có hai tiệm cận

Tiệm cận đứng $x = \dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$. Đồ thị nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ nên đồ thị nhận đường thẳng $y = 2$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = -\infty, \lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng.

Chú ý: Có thể cho HS áp dụng luôn nhận xét ở phần trên để luyện tập.

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2016}{\sqrt{x^2-2016}}$.

Giải. TXĐ: $D = (-\infty; -12\sqrt{14}) \cup (12\sqrt{14}; +\infty)$. Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Ví dụ 3. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.

Giải. TXĐ: $D = [0; 4) \cup (4; +\infty)$. Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$ nên đồ thị nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to4^+} y = +\infty, \lim\limits_{x\to4^-} y = -\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 4$ làm tiệm cận đứng.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi $y_1; y_2$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 4]$. Tính tích $y_1.y_2$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$.

A. Giá trị lớn nhất bằng $-\frac{13}{12}$.
B. Giá trị lớn nhất bằng $\frac{11}{6}$.
C. Giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.
D. Giá trị lớn nhất bằng $-\frac{11}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x-\sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.
C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 4. Hàm số $y=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** ± 1. **C.** $\pm\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất N của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

A. $N=-2;\ M=1$. **B.** $N=0;\ M=2$ **C.** $N=\frac{1}{2};\ M=1$. **D.** $N=0;\ M=1$.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Câu 7. Tìm điểm có hoành độ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ để hàm số $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất .

A. $x=\frac{\pi}{4}$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}$. **C.** $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$. **D.** $x=\frac{\pi}{3}$.

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất N của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

A. $M=1;\ N=-1$. **B.** $M=2; N=0$. **C.** $M=\frac{1}{4};\ N=-1$. **D.** $M=1; N=\frac{1}{4}$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+3$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=5$. **B.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=3$. **C.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=4$. **D.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=6$

Câu 10. Hàm số $y=x^3-2x^2-7x+5$ có giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M trên $[1;3]$. Tính tổng m + M.

A. $m+M=-\frac{338}{27}$.
B. $m+M=-\frac{446}{27}$
C. $m+M=-10$.
D. $m+M=-\frac{14}{27}$.

Câu 11. Tìm các giá trị của tham số $m>0$ để hàm số $y=x^3-3x+1$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(\frac{1}{2};1)$.

C. $m\in(-\infty;1)\setminus\{-2\}$. **D.** $m\in(0;2)$.

Câu 12. Một công ti bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ti đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ti có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

A. 115.250.000. **B.** 101.250.000.

C. 100.000.000. **D.** 100.250.000.

Câu 13. Doanh nghiệp Hồng Anh cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là x^3+2x (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y-27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Hồng Anh cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 14. Một người thợ xây cần xây một bể chứa 108 m^3 nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất. Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày thành bể và đáy bể là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau.

A. 9m. **B.** 6m. **C.** 3m. **D.** 2m.

Câu 15. Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường đại học kinh tế quốc dân Hà Nội. Kỳ I của năm thứ nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1m^2 đất khi bán là 1500.000 VN đồng.

A. 112687500VN đồng. **B.** 114187500VN đồng.

C. 115687500VN đồng. **D.** 117187500VN đồng.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+5$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $y=2$ là một đường tiệm cận ?

A. $y=\dfrac{3x}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{2-x}$. **C.** $y=\dfrac{-2x+1}{2-x}$. **D.** $y=x-2$.

Câu 18. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

Câu 19. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

A. $y=-1$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+m}$ tạo với 2 trục tọa độ một hình vuông.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** A và B sai. **D.** A và B đều đúng.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x+1}$ tới gốc tọa độ O bằng $\sqrt{5}$.

A. $m=\pm 4$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** A và B sai. **D.** A và B đều đúng.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{2-3x}{3x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nằm bên trái trục tung.

A. $m<0$. **B.** $m=0$. **C.** m tùy ý. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m<0$. **C.** $m=0$. **D.** $m>0$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\pm 4$.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	B	B	C	B	C	D	A	A	A	B	A	C	D	A	C	D	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	C	D	D															

CHỦ ĐỀ 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a) Tập xác định: Tìm tập xác định của hàm số.

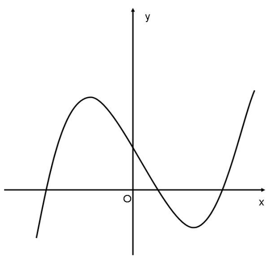
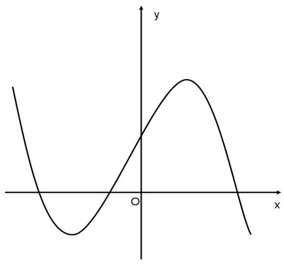
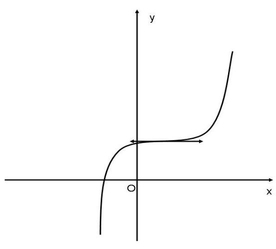
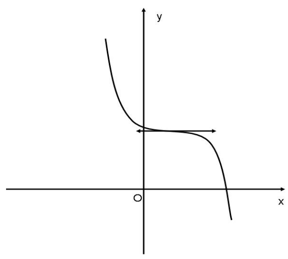
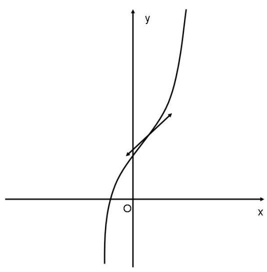
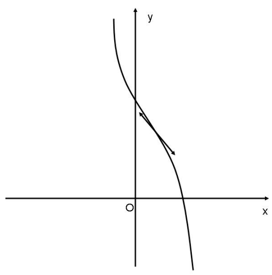
b) Sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tiệm cận (nếu có).
- Xét chiều biến thiên của hàm số:
  Tính đạo hàm. Tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
  Lập bảng biến thiên và kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

c) Đồ thị: Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

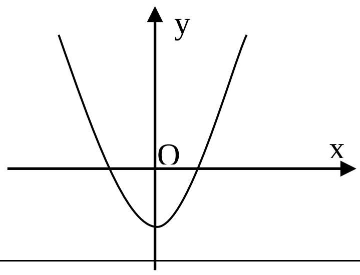
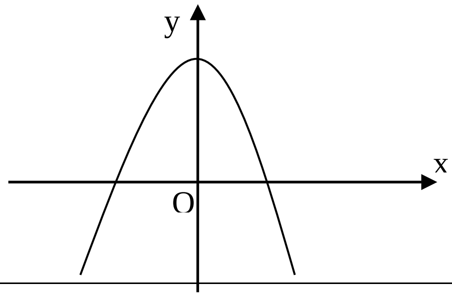
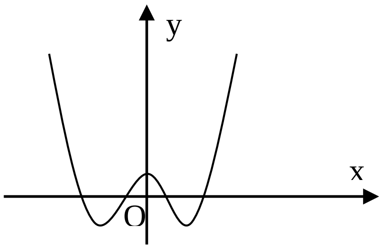
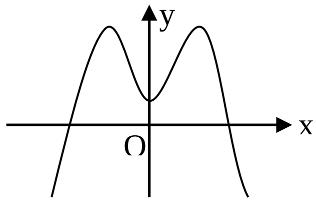
2. Đồ thị hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

- Các dạng đồ thị của hàm số bậc 3:

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình y’ = 0 có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình y’ = 0 có nghiệm kép		
Phương trình y’ = 0 vô nghiệm		

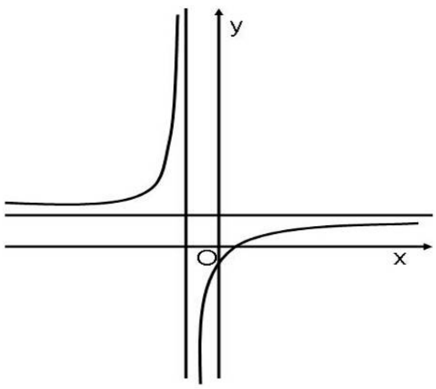
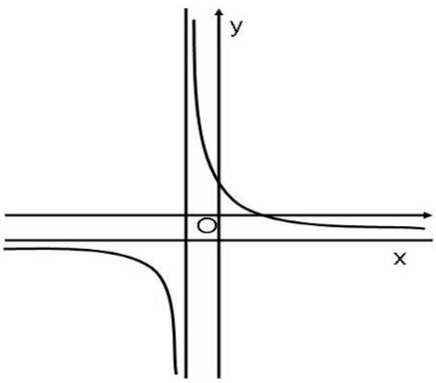
3. Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

- Các dạng đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương:

	a > 0	a < 0
y'= 0 có 1 nghiệm (a.b > 0)		
y'= 0 có 3 nghiệm (a.b<0)		

4) Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Các dạng đồ thị hàm số:

D = ad – bc > 0	D = ad – bc < 0
	

Chú ý: Cần hướng dẫn học sinh cách "đọc" đồ thị để suy ra chiều biến thiên, lập bảng biến thiên trong mỗi trường hợp và chỉ ra các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có)

5) Các phép biến đổi đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ *có đồ thị* (C). *Khi đó với số* $a > 0$, *ta có*

+ *Hàm số* $y = f(x) + a$ *có đồ thị* (C') *bằng cách tịnh tiến đồ thị* (C) *theo phương* Oy *lên trên* a *đơn vị.*

+ *Hàm số* $y = f(x) - a$ *có đồ thị* (C') *bằng cách tịnh tiến đồ thị* (C) *theo phương* Oy *lên trên* a *đơn vị.*

+ Hàm số $y = f(x+a)$ có đồ thị (C') bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox sang trái a đơn vị.

+ Hàm số $y = f(x-a)$ có đồ thị (C') bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox sang phải a đơn vị.

+ Hàm số $y = -f(x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của đồ thị (C) qua trục Ox.

+ Hàm số $y = f(-x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của đồ thị (C) qua trục Oy.

+ Hàm số $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \ge 0 \\ f(-x) \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') suy từ đồ thị (C) bằng cách:

Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần đồ thị (C) nằm bên trái Oy.

Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy qua Oy.

+ Hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \ge 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') suy từ đồ thị (C) bằng cách:

Giữ nguy ên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox.

Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phía dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

II. LUYỆN TẬP (KĨ NĂNG CƠ BẢN)

Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm số

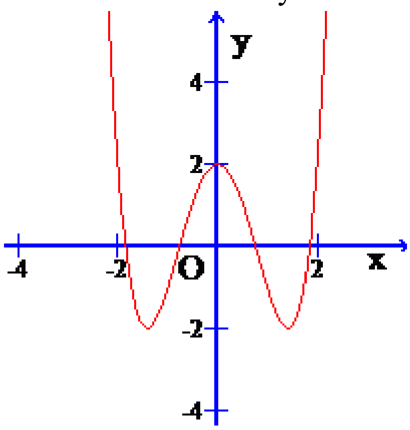
Ví dụ 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

B. $y = x^3 + 3x + 1$.

C. $y = -x^4 + 4x^2 + 2$.

D. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.



Hướng dẫn giải. Đây là dạng đồ thị hàm bậc 4 trùng phương với hệ số a > 0. Chọn **A.**

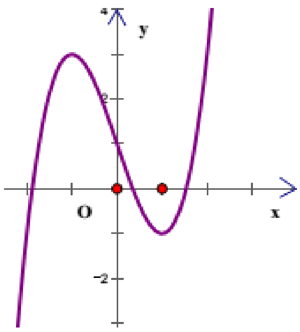
Ví dụ 2. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^2 + 2x - 3$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

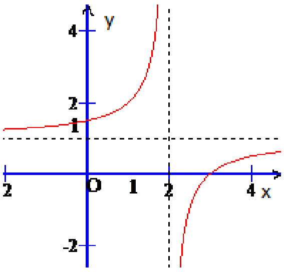


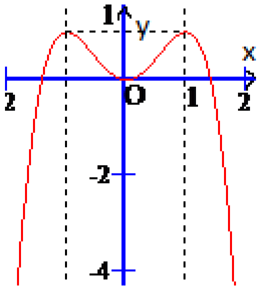
Hướng dẫn giải

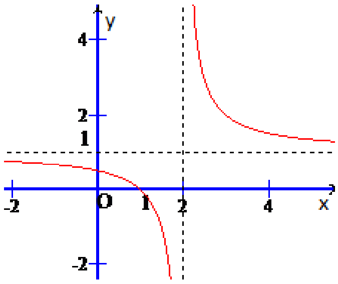
Ta thấy đường cong là đồ thị của hàm bậc ba, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Vậy đáp án là D.

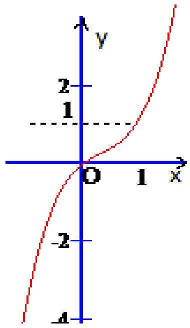
Ví dụ 3. Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây?

A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.









Hướng dẫn giải

Do hàm số đã cho là hàm phân thức nên loại đáp án B và D.

$y=\dfrac{x-1}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đáp án là C.

Dạng 2. Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên chỉ ra số nghiệm của phương trình

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-2 \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-2;4]$. B. $(-2;4)$. C. $(-2;4]$. D. $(-\infty;4]$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $d: y=m$ tại 3 điểm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra $-2<m<4\Rightarrow m\in(-2;4)$. Chọn **B**.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m=0$. B. $m>\dfrac{4}{3}$. C. $0<m<\dfrac{4}{3}$. D. $m=0$ hoặc $m>\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại 2 điểm phân biệt. Từ BBT suy ra $m = 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$. Chọn D.

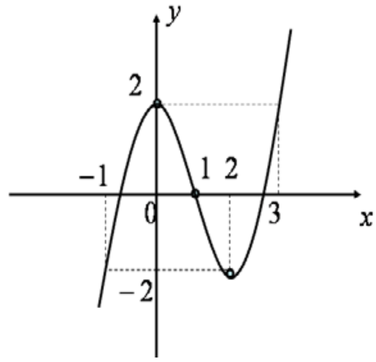
Ví dụ 6. Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) được cho ở hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt .

A. $-2 \le m \le 2$.

B. $m = -2$ hoặc $m = 2$

C. $m < -2$ hoặc $m > 2$

D. $m \le -2$ hoặc $m \ge 2$.



Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = -m + 3$ có đúng một nghiệm thực.

A. $-1 < m < 3$. B. $-1 \le m \le 3$. C. $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -m + 3$. Từ BBT ta được $\left[\begin{array}{l} -m + 3 > 4 \\ -m + 3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$. Chọn **D.**

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m - 1$ có nghiệm thực lớn hơn 2.

A. $m \le 4$. B. $m < 4$. C. $m \le 0$. D. $0 < m < 4$.

Hướng dẫn giải

Nghiệm của phương trình $f(x)=m-1$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$. Từ BBT ta được $m-1<3 \Leftrightarrow m<4$. Chọn **B**.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt .

A. $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-1 \end{array}\right.$.   B. $-1<m<3$.   C. $-1\le m\le 3$.   D. $\left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m\le -1 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$. Từ BBT ta được $\left[\begin{array}{l} m-1>2 \\ m-1<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-1 \end{array}\right.$. Chọn **A**.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị được cho ở hình 1. Đồ thị ở hình 2 là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

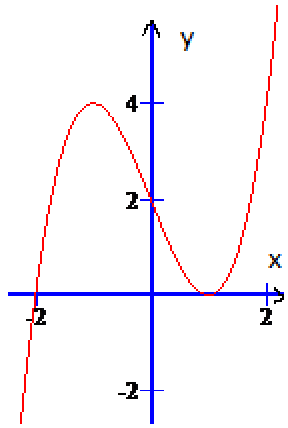
A. $y=|x^3|-3|x|+2$.

B. $y=\left|x^3-3x+2\right|$.

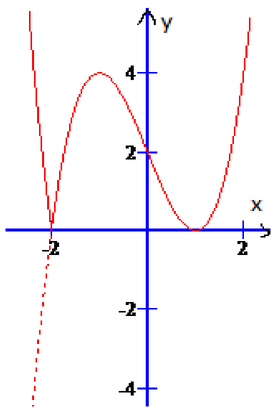
C. $|y|=x^3-3x+2$.

D. $y=|x-1|\left(x^2+x-2\right)$.

Hình 1.



Hình 2.



Hướng dẫn giải

Cách 1. Đồ thị ở hình 2 được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên trục hoành Ox

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) ở dưới Ox qua Ox, bỏ đi phần đồ thị (C) ở dưới Ox.

+ Đồ thị thu được nằm hoàn toàn trên Ox. Đây là đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x+2\right|$. Chọn **B**.

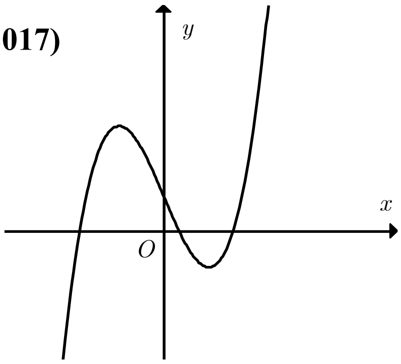
Cách 2. Đồ thị ở hình 2 nằm ở phía trên trục hoành $\Rightarrow y\ge 0$. Chọn **B**.

x	-1		$-\frac{3}{4}$		0		$\frac{3}{4}$		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\frac{81}{32}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{81}{32}$	$\nearrow$	-1

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



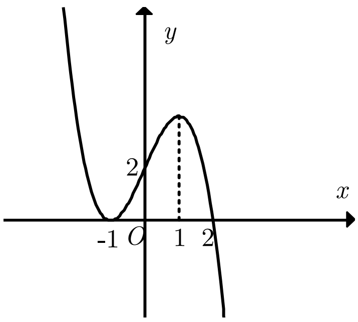
A. $y=-x^2+x-1$.

B. $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^4-x^2+1$.

D. $y=x^3-3x+1$.

Câu 2. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



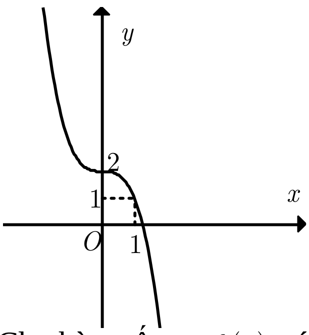
A. $y=(x+1)^2(1-x)$.

B. $y=(x+1)^2(1+x)$.

C. $y=(x+1)^2(2-x)$.

D. $y=(x+1)^2(2+x)$.

Câu 3. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=-x^3+1$.

B. $y=-x^3+3x+2$.

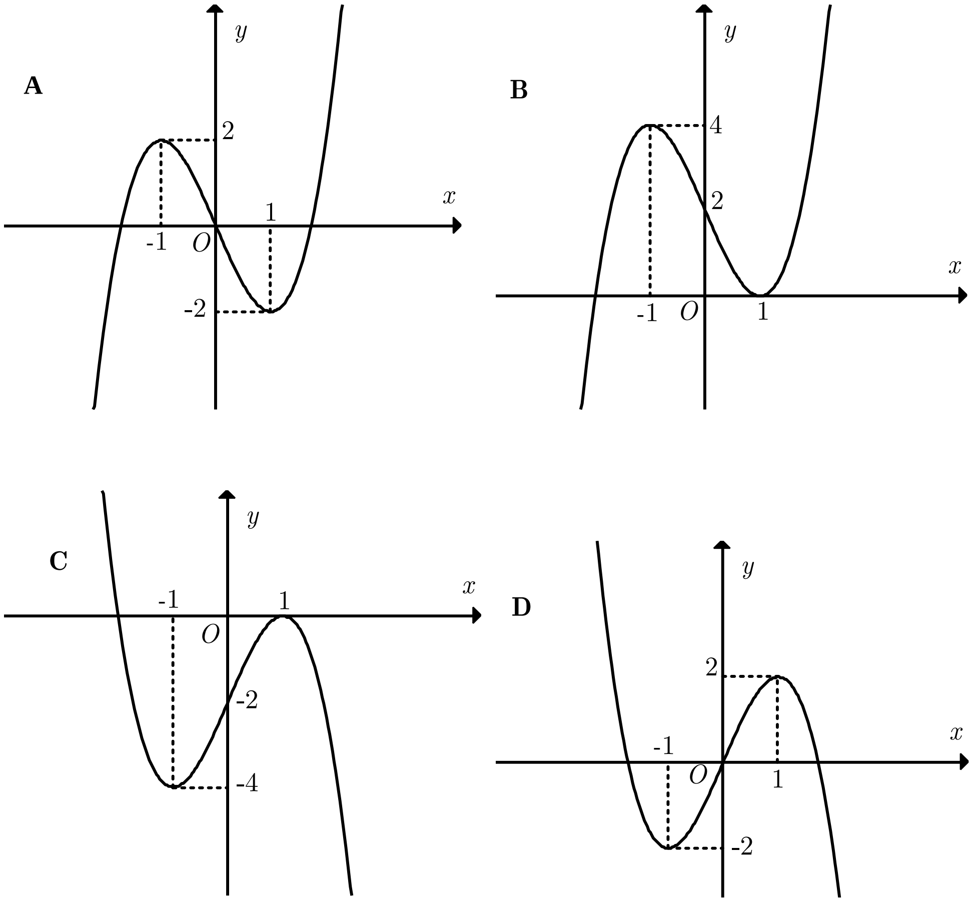
C. $y=-x^3-x+2$.

D. $y=-x^3+2$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

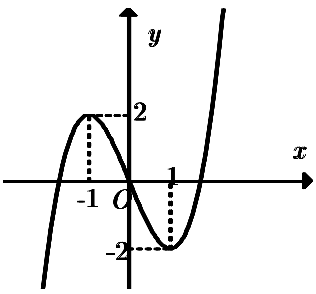
Đồ thị nào thể hiện hàm số $y = f(x)$?



(Đáp án : A).

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.

Chọn đáp án đúng?



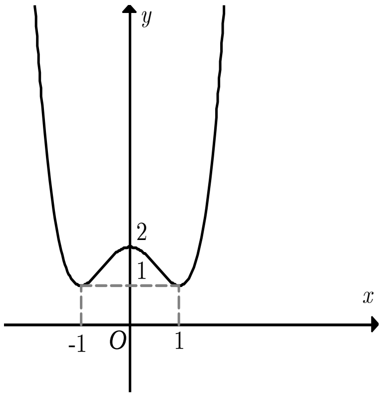
A. Hàm số có hệ số $a < 0$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.

Câu 6. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



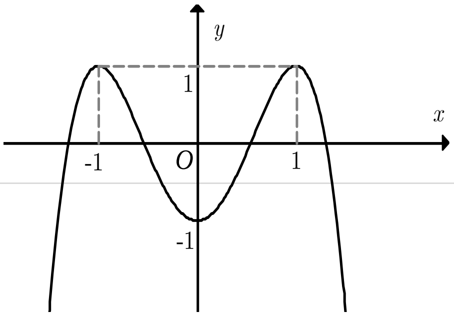
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 7. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



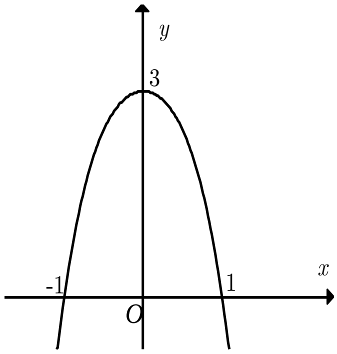
A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

B. $y=-2x^4+4x^2-1$.

C. $y=-x^4+2x^2-1$.

D. $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 8. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



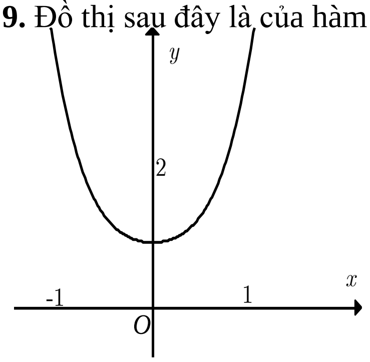
A. $y=-x^4-2x^2+3$.

B. $y=-x^4-2x^2-3$.

C. $y=-x^4+2x^2+3$.

D. $y=x^4+2x^2+3$.

Câu 9. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^4+x^2+2$.

B. $y=x^4-x^2+2$.

C. $y=x^4-x^2+1$.

D. $y=x^4+x^2+1$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Chọn phát biểu sai?

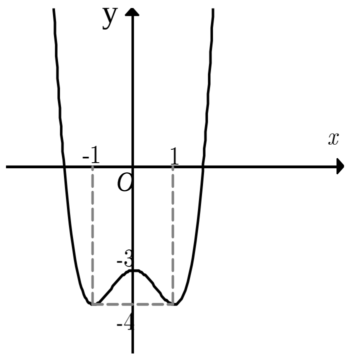
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

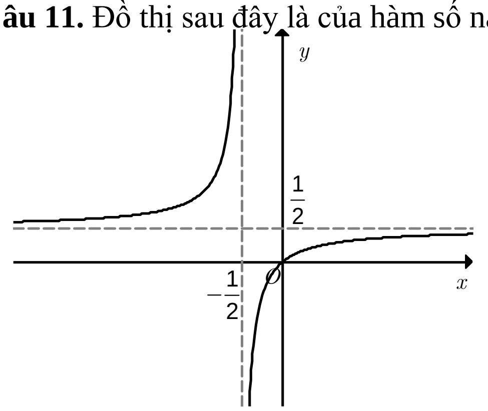
B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

C. Đồ thị hàm số đã cho biểu diễn như hình bên.

D. Hàm số đã cho là $y=x^4-2x^2-2$.



Câu 11. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



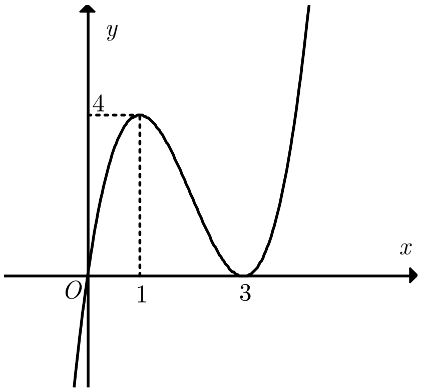
A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

B. $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$.

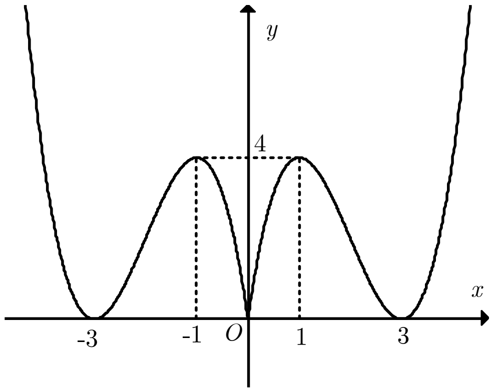
C. $y=\dfrac{x}{2x+1}$.

D. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



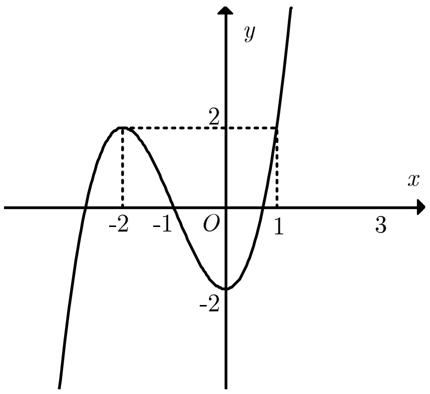
Hình 1



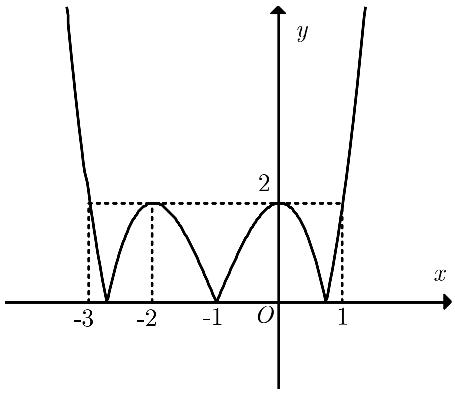
Hình 2

A. $y=-x^3+6x^2-9x$. **B.** $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$. **C.** $y=|x^3-6x^2+9x|$. **D.** $y=|x|^3-6x^2+9|x|$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=|x|^3+3|x|^2-2$. **B.** $y=|x^3+3x^2-2|$. **C.** $y=||x|^3+3x^2-2|$. **D.** $y=-x^3-3x^2+2$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.

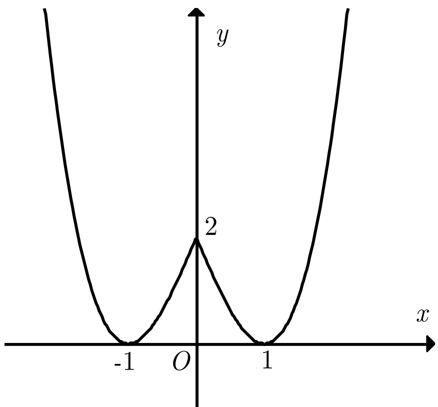
(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

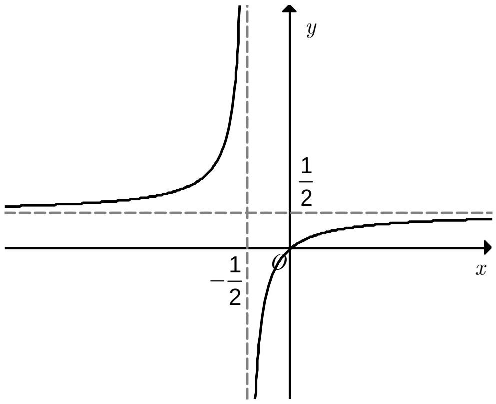
(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là:

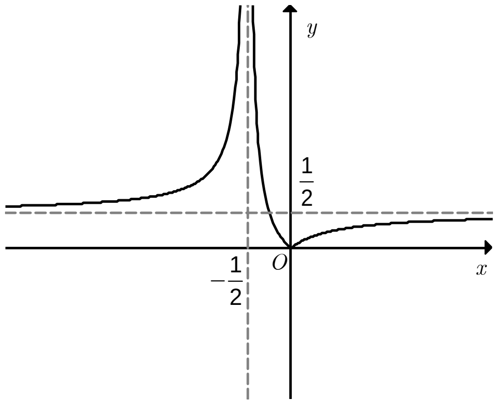


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



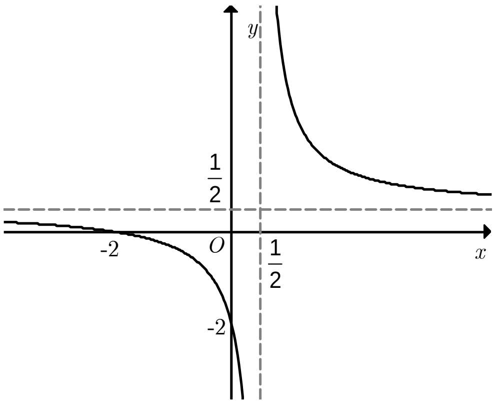
Hình 1



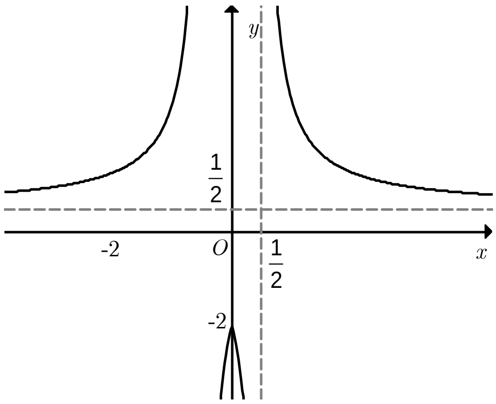
Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$. **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



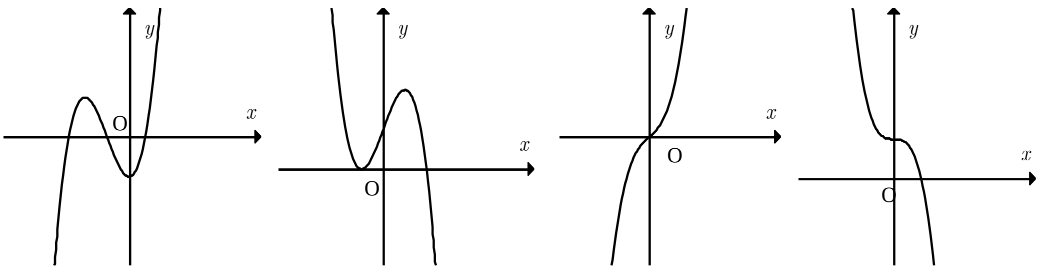
Hình 1



Hình 2

A. $y=-\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)$. **B.** $y=\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$. **C.** $y=\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$. **D.** $y=\dfrac{|x|+2}{2x-1}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$.

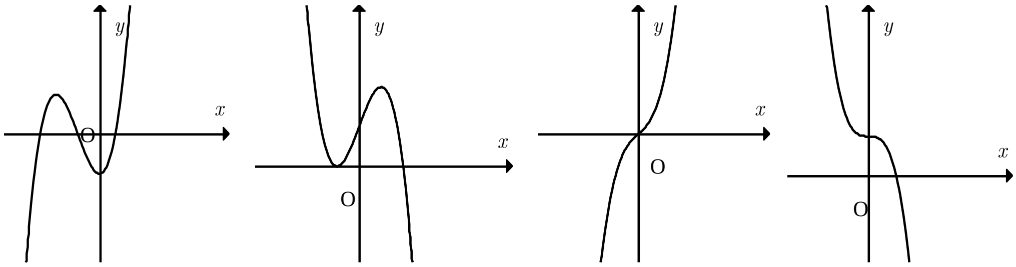


(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Các đồ thị nào có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?

A. (I). **B.** (I) và (III). **C.** (II) và (IV). **D.** (III) và (IV).

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Trong các mệnh đề sau hãy chọn mệnh đề đúng:

A. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a\neq 0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

D. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

Câu 18. Cho đường cong (C) có phương trình $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Tịnh tiến (C) sang phải 2 đơn vị, ta được đường cong mới có phương trình nào sau đây?

A. $y=\sqrt{-x^2+4x+3}$. **B.** $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$. **C.** $y=\sqrt{1-x^2}+2$. **D.** $y=\sqrt{1-x^2}-2$.

Câu 19. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị, sau đó lên trên 5 đơn vị ta được đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{11x}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x-5}{2x+3}+5$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{2x+3}+5$. **D.** $y=\dfrac{11x+22}{2x+5}$.

Câu 20. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	- 4	↗	-3	↘	- 4	↗	$+\infty$

A. $y=x^4-3x^2-3$. B. $y=-\dfrac{1}{4}x^4+3x^2-3$. C. $y=x^4-2x^2-3$. D. $y=x^4+2x^2-3$.

Câu 21. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

A. $y=x^4-3x^2+1$. B. $y=-x^4+3x^2+1$. C. $y=x^4+3x^2+1$. D. $y=-x^4-3x^2+1$.

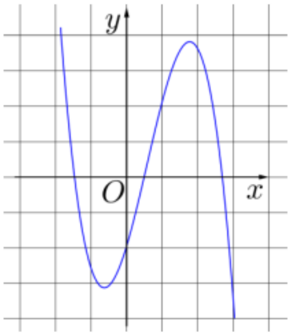
Câu 22. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		- 1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y		↗	$+\infty$ ‖	↗	2

2 $\qquad\qquad$ $-\infty$

A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. $\qquad$ B. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. $\qquad$ C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. $\qquad$ D. $y=\dfrac{x+2}{1+x}$.

Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



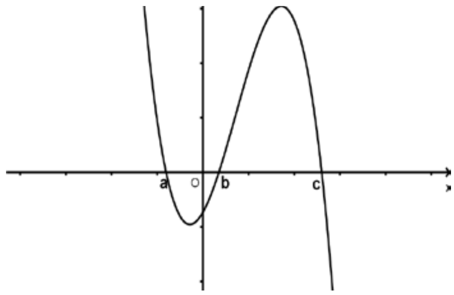
A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

B. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

D. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(c)>f(a)>f(b)$.

B. $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$.

D. $f(b)>f(a)>f(c)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đường thẳng $d: y=2m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có tung độ nhỏ hơn 0.

A. $m<0$. $\qquad$ B. $m>0$ $\qquad$ C. $m\le 0$. $\qquad$ D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	C	D	A	B	B	B	A	D	D	C	D	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
B	A	B	C	B	A	C	C	A	A	A	C	

Buổi 4.

CHỦ ĐỀ 6. **SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC ĐỒ THỊ. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) *Cho hai đồ thị (C₁): $y = f(x)$ và (C₂): $y = g(x)$. Để tìm hoành độ giao điểm của (C₁) và (C₂) ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).*

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Nghiệm x_0 của phương trình (*) chính là hoành độ giao điểm. Thay giá trị này vào một trong hai hàm số ban đầu ta được tung độ giao điểm.

Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C₁) và (C₂).

2) Các dạng bài tập thường gặp và phương pháp giải

Bài toán 1. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x)$.

+) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

+) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

Bài toán 2. Tương giao của đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)

+) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$.

+) Lập BBT cho hàm số $y = f(x)$.

+) Dựa vào giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

***) Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp này khi m độc lập với x.

Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m) = 0$

+) Nhẩm nghiệm (Khử tham số): Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.

+) Phân tích $F(x,m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0).g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ ($g(x) = 0$ là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

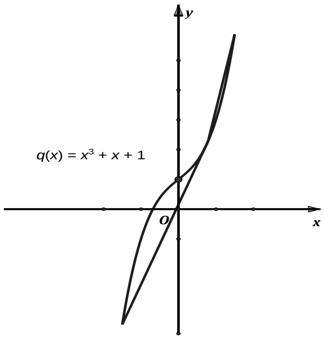
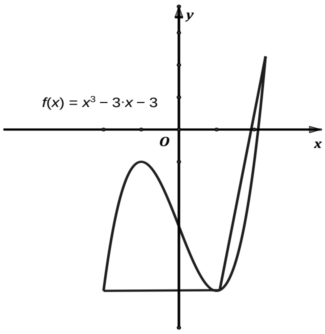
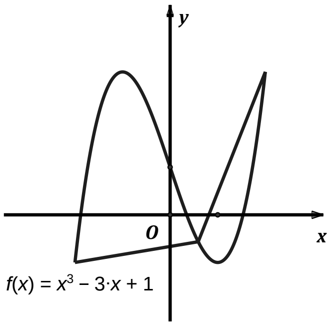
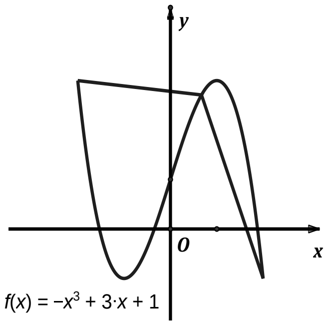
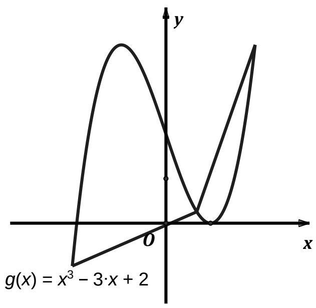
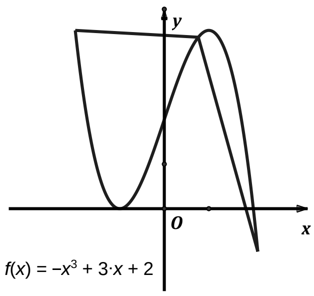
+) Dựa vào yêu cầu bài toán để xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$.

Phương pháp 3: Cực trị

***) Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

***) Quy tắc:**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m) = 0$ (1). Xét hàm số $y = F(x,m)$

+) Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH) - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$ - Hoặc hàm số có CĐ, CT và $y_{cd}.y_{ct}>0$ (hình vẽ)	 
+) Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}<0$	 
+) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}=0$	 

Bài toán. Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng

a) Định lí Vi-ét

*) Cho bậc 2: Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thì ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$

*) Cho bậc 3: Cho phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thì ta có:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}, x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

c) Tính chất của cấp số cộng

+) Cho 3 số a,b,c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a+c=2b$

d) Phương pháp giải toán:

+) Điều kiện cần: $x_0=-\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

Bài toán 3. Tương giao của hàm phân thức

Phương pháp

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d:y=px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{ax+b}{cx+d}=px+q\Leftrightarrow F(x,m)=0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

*) **Các câu hỏi thường gặp**:

1. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow(1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow(1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn : $-\frac{d}{c}<x_1<x_2$.

3. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow(1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1<x_2<-\frac{d}{c}$.

4. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow(1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1<-\frac{d}{c}<x_2$.

5. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng $AB=k$

+) Tam giác ABC vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích S_0.

*** Quy tắc:**

+) Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+) Xác định tọa độ của A và B (chú ý định lý Vi-ét)

+) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

***) Chú ý:** Công thức khoảng cách:

+) $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B):AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

+) $\begin{cases}M(x_0;y_0)\\ \Delta:Ax_0+By_0+C=0\end{cases}\Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Bài toán 4. Tương giao của hàm bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq0)$

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq0)$ **(1)**

1. Nhẩm nghiệm:

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- Khi đó ta phân tích: $f(x,m)=(x^2-x_0^2)g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm x_0\\ g(x)=0\end{array}\right.$

- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$

2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:

- Đặt $t=x^2,(t\geq0)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0$ (2).

- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l}t_1<0=t_2\\ t_1=t_2=0\end{array}\right.$

- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

3. Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc bốn trùng phương (1) cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi – ét tìm được m.

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán 1: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số:

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M.

- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$
- Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Bài toán 2: Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0) = k$ (*).
- Giải (*) tìm x_0. Suy ra $y_0 = f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = k(x - x_0) + y_0$

Bài toán 3: Tiếp tuyến đi qua điểm

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $A(a; b)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua A.

- Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và có hệ số góc k. Khi đó $(\Delta): y = k(x - a) + b$ (*)
- Để (Δ) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - a) + b & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.
- Thay (2) vào (1) ta có phương trình ẩn x. Tìm x thay vào (2) tìm k thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Cách khác: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Vì $M \in (C) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$.

PTTT của (C) tại M có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1)

Tiếp tuyến đi qua $A(a; b)$ nên $b = y'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$

Giải phương trình với ẩn x_0, thay vào (1) ta được PTTT.

Chú ý:

1. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là: $k = f'(x_0)$
2. Cho đường thẳng $(d): y = k_d x + b$

+) $(\Delta)//(d) \Rightarrow k_\Delta = k_d$ +) $(\Delta) \perp (d) \Rightarrow k_\Delta . k_d = -1 \Leftrightarrow k_\Delta = -\frac{1}{k_d}$

+) $(\Delta, d) = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{k_\Delta - k_d}{1 + k_\Delta . k_d}\right|$ +) $(\Delta, Ox) = \alpha \Rightarrow k_\Delta = \pm\tan\alpha$

3. Tiếp tuyến tại các điểm cực trị của đồ thị (C) có phương song song hoặc trùng với trục hoành.

4. Cho hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

+) Khi $a > 0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.
+) Khi $a < 0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc lớn nhất.

II. LUYỆN TẬP

Ví dụ 1. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị hàm số sau: $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) và y = m – x (d).

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x+1}{x-1} = m - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x+1 = (m-x)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x+1 = mx - m - x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - mx + m + 1 = 0.$$

Biện luận:

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{2}$ hoặc $m > 2 + \sqrt{2}$ thì (C) và d có hai điểm chung.

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{2}$ hoặc $m = 2 + \sqrt{2}$ thì (C) và d có một điểm chung.

Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2}$ thì (C) và d không có điểm chung.

Chú ý: Nhấn mạnh cho HS tùy theo yêu cầu của bài toán để chọn phương án thích hợp vì khi đó chỉ hỏi một ý trong bài.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C): $y = x^3 + mx + 5$ cắt đường thẳng d: y = 6x + m tại ba điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m < \frac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$. B. $m < \frac{21}{4}$. C. $m > \frac{21}{4}$. D. $\begin{cases} m > \frac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3 + mx + 5 = 6x + m \ (*) \Leftrightarrow x^3 + (m-6)x + 5 - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + x + m - 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ (1) \\ x^2 + x + m - 5 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 21 - 4m > 0 \\ 1^2 + 1 + m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$. Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. B. $m > -\dfrac{1}{3}$. C. $m < -\dfrac{1}{3}$. D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \ (1).$$

Đặt $t = x^2,\ t \geq 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0$ (2).

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 > 0 \\ 3m + 1 > 0 \\ 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \\ m > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Chọn D.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$. Biết đồ thị hàm số đã cho luôn cắt đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + m$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm giá trị của m sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.

A. $m = -1$. B . $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x + 3 = \left(\dfrac{1}{2}x + m\right)(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 4m - 6 \ (*).$$

Ta có $\Delta' = m^2 - 1(4m-6) = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0, \forall m$. Suy ra (C) luôn cắt d tại A và B với mọi m. Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta có $y_A = \dfrac{1}{2}x_A + m; y_B = \dfrac{1}{2}x_B + m$.

Lại có x_A, x_B là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_A + x_B = -2m \\ y_A . y_B = 4m - 6 \end{cases}$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \frac{1}{4}(x_B - x_A)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(x_B - x_A)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}(x_A{}^2 + x_B{}^2 - 2x_A x_B)} = \sqrt{\frac{5}{4}((x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B)} = \sqrt{\frac{5}{4}\left[(-2m)^2 - 4(4m-6)\right]}$$

$=\sqrt{5\left[(m-2)^2+2\right]}\geq\sqrt{10}$.

Do đó, độ dài đoạn AB nhỏ nhất bằng $\sqrt{10}\Leftrightarrow m-2=0\Leftrightarrow m=2$. Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1\ (C_m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=-4$. B. $m=4$. C. $m\in\left\{4;-\frac{9}{4}\right\}$. D. $m=\frac{9}{4}$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là:

$$x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0\ (1).$$

Đặt $t=x^2,\ t\geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0\ (2)$.

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\\2m+1>0\\2(m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m>-\frac{1}{2}\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m>-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Với $\begin{cases}m\neq 0\\m>-\frac{1}{2}\end{cases}$ đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Gọi $t_1<t_2$ là hai nghiệm của (2). Khi đó (1) có bốn nghiệm $-\sqrt{t_2}<-\sqrt{t_1}<\sqrt{t_1}<\sqrt{t_2}$ là hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành. Các hoành độ trên lập thành cấp số cộng thì $9t_1=t_2$ (3).

Ta cũng có t_1,t_2 là nghiệm của (2) nên $\begin{cases}t_1+t_2=2(m+1)\ (4)\\t_1.t_2=2m+1\ \ (5)\end{cases}$.

Từ (3) $\Rightarrow t_2=9t_1$ vào (4) và (5) ta được: $\begin{cases}10t_1=2(m+1)\\9{t_1}^2=2m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\frac{m+1}{5}\quad(6)\\9\left(\frac{m+1}{5}\right)^2=2m+1\ (7)\end{cases}$.

Ta có (7) $\Leftrightarrow 9m^2+18m+9=50m+25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\ (tm)\\m=-\frac{9}{4}\ (l)\end{array}\right.$. Chọn B.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ (1). Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $m \in \left(-\frac{1}{4};1\right) \setminus \{0\}$. B. $m \in \left(-\frac{1}{4};1\right)$. C. $m \in \left(-1;\frac{1}{4}\right) \setminus \{0\}$. D. $m \in \left(-1;\frac{1}{4}\right)$.

HD giải. Phương trình xác định hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \ (1).$$

$$\Leftrightarrow (x-1).(x(x-1)-m) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \ (2) \end{array}\right..$$

Đặt $x_3 = 1$. Yêu cầu bài toán sẽ được thực hiện khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$ thỏa mãn điều kiện: $1^2 + x_1^2 + x_2^2 < 4$ (3).

Điều kiện để (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 là: $\begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ 1^2 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} (a)$.

Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = -m$ nên

$$(3) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \Leftrightarrow 1 + 2m < 3 \Leftrightarrow m < 1 \ (b).$$

Tổng hợp các điều kiện (a) và (b) ta được $m \in \left(-\frac{1}{4};1\right) \setminus \{0\}$. Chọn A.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a) Tại điểm có hoành độ bằng – 1.

b) Tại điểm có tung độ bằng 2.

c) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7.

d) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

HD giải. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

a) Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$, $y'(-1) = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y + 2 = 9(x + 1) \Leftrightarrow y = 9x + 7.$$

b) Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Cho $y_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $y'(0) = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 2$.

Với $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $y'(3) = 9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 9(x - 3) \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

c) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0.$$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7 nên $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$, $y'(-1) = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: y + 2 = 9(x + 1) $\Leftrightarrow$ y = 9x + 7 (l).

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$, $y'(3) = 9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: y – 2 = 9(x – 3) $\Leftrightarrow$ y = 9x – 25.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 9x – 25.

d) Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{45}x$ nên

$$y'(x_0) = \frac{-1}{-\frac{1}{45}} = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{array}\right..$$

Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 52 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 52 = 45(x – 5) $\Leftrightarrow$ y = 45x – 173.

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -52 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 52 = 45(x + 3) $\Leftrightarrow$ y = 45x + 83.

Ví dụ 8. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

A. $x + y - 1 = 0$.
B. $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$.
C. $x + y + 1 = 0$ và $x + y + 5 = 0$.
D. $x + y - 5 = 0$.

HD giải. Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ hay } x + (x_0 - 1)^2 y - 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \ (*).$$

Khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2}$ khi và chỉ khi

$$\frac{|2 - 2x_0|}{\sqrt{1 + (x_0 - 1)^4}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = 2.$$

Suy ra các tiếp tuyến cần tìm là: $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$. Chọn B.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (C). Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng -9.

A. M(0; 3) và M(2; 5).
B. M(0; 3) và M(-2; 5).
C. M(0; -3) và M(-2; 5).
D. M(0; -3) và M(2; 5).

HD giải. Ta có I(-1; 2). Gọi $M \in (C) \Rightarrow M(x_0; 2-\frac{3}{x_0+1}) \Rightarrow k_{IM} = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{-3}{(x_0+1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}$.

$ycbt \Leftrightarrow k_M . k_{IM} = -9 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+1)^2} . \frac{-3}{(x_0+1)^2} = -9 \Leftrightarrow x_0 = 0; x_0 = -2$.

Suy ra có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; -3) và M(-2; 5). Chọn C.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 4x$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 2. Tìm số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 3. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN.

A. $-\frac{5}{2}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 4 (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017). Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; ký hiệu $(x_0; y_0)$ là toạ độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $-3 < m < 1$. B. $-3 \le m \le 1$. C. $m>1$. D. $m<-3$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m>4$. B. $0 \le m < 4$. C. $0 < m \le 4$. D. $0 < m < 4$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$.

A. $0 < m < 4$. B. $m>4$. C. $m<0$. D. $m=0; m=4$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m<-2$. B. $m>2$. C. $-2 < m < 2$. D. $m = -2$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^2 \left|x^2 - 2\right| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < 1$. B. $m > 0$. C. $m \le 1$. D. $m = 0$.

Câu 10. Cho đường cong $(C): y=\frac{3x-1}{x-2}$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 đường tiệm cận của (C) bằng 6?

A. 4. B. 2. C. 0. D. 6.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m+2$ có đồ thị (C). Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để (Δ) vuông góc với đường thẳng $(d): y=\frac{1}{4}x-2016$.

A. $m=-1$. B. $m=0$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Câu 12. Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$ với trục Oy. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị trên tại điểm M.

A. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$. B. $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$. C. $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$. D. $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Câu 13. Tìm số các tiếp tuyến đi qua gốc toạ độ *O* của đồ thị $(C): y=x^4-2x^2$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ (*C*). Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (*C*) sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại các điểm *A*, *B* thoả mãn $OA=4OB$.

A. $k=-\frac{1}{4}$. B. $k=\frac{1}{4}$. C. $k=-1$. D. $k=1$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=6x+m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=x^3+3x-1$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-3\end{array}\right.$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y-16=-9(x-3)$. B. $y+16=-9(x+3)$ C. $y-16=-9(x+3)$. D. $y=-9x-27$.

Câu 17. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là bằng nhau.

A. $M(0;1)$. B. $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$ và $M\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

C. $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$. D. $M(0;1), M(-2;3)$ và $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 18. Tìm hệ số góc nhỏ nhất của các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. -3. B. 3. C. -4. D. 0.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để qua điểm $M(2;\, m)$ kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

A. $m \in (4;\, 5)$. B. $m \in (-2;\, 3)$. C. $m \in (-5; -4)$. D. $m \in (-5;\, 4)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m > -3$. B. $m < 1$. C. $m < -3$. D. $m > 1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

A. $m = 1; m = -7$. B. $m = 1; m = 2$. C. $m = -7; m = 5$. D. $m = 1; m = -1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m < 3$. B. $m > 3$. C. $m > 3$. D. $m > 3$ hoặc $m = 2$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

A. $m \in \{-3; 1\}$. B. $m \in \{-2; -1\}$. C. $m \in \{0; 2\}$. D. $m = 3$.

Câu 24. Gọi $M \in (C): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB.

A. $S = \dfrac{121}{6}$. B. $S = \dfrac{119}{6}$. C. $S = \dfrac{123}{6}$. D. $S = \dfrac{125}{6}$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d_m: y = x + m$. Tìm giá trị của tham số m để (C) cắt d_m tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

A. $m = \dfrac{1}{3}$. B. $m = \dfrac{4}{3}$. C. $m = \dfrac{2}{3}$. D. $m = -\dfrac{1}{3}$.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
C	D	B	C	A	D	B	C	A	A	C	A	
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	A	C	D	A	C	A	A	D	C	A	C

ĐỀ LUYỆN TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ

MA TRẬN ĐỀ
(Chuyên đề hàm số)

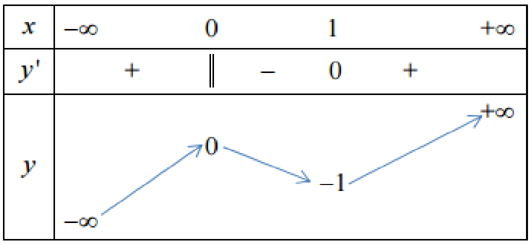
1. Ma trận

Cấp độ / Chủ đề	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng		Cộng
			Cấp độ thấp	Cấp độ cao	
Tính đơn điệu của hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 4 Số điểm: 1,6 (16%)
Cực trị của hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 2 Số điểm: 0,8	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 4 Số điểm: 1,6 (16%)
Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 3 Số điểm: 1,2 (12%)
Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 3 Số điểm: 1,2 (12%)
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 2 Số điểm: 0,8	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 4 Số điểm: 1,6 (16%)
Một số bài toán thường gặp về đồ thị		Số câu: 3 Số điểm: 1,2	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 5 Số điểm: 2,0 (20%)
Ứng dụng thực tế			Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 2 Số điểm: 0,8 (8%)
Tổng	Số câu: 5 Số điểm: 2,0 (20%)	Số câu: 10 Số điểm: 4,0 (40%)	Số câu: 7 Số điểm: 2,8 (28%)	Số câu: 3 Số điểm: 1,2 (12%)	Số câu: 25 Số điểm: 10 (100%)

2. Các chuẩn đánh giá

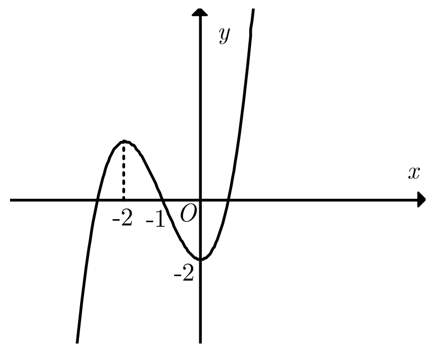
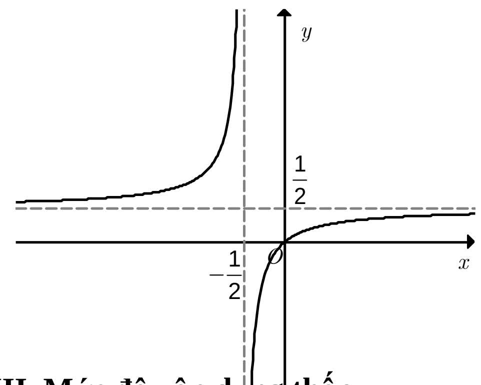
Chủ đề	Chuẩn đánh giá
Tính đơn điệu của hàm số	**I. Mức độ nhận biết:** - Nhớ được điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng. - Biết mối liên hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số và dấu của đạo hàm cấp một của nó. - Nhận dạng được bảng biến thiên của một số hàm số đơn giản. **Ví dụ.** Phát biểu nào sau đây là đúng? **A**. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ khi và chỉ khi

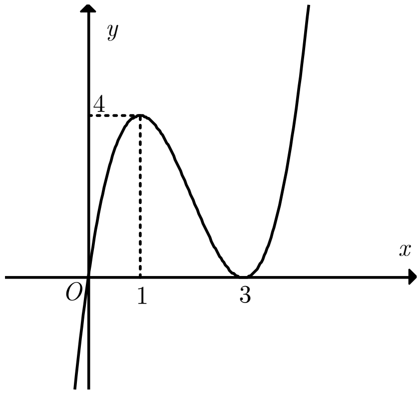
	$f'(x)\le 0, \forall x\in(a;b)$. **B.** Nếu $f'(x)\le 0, \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$. **C.** Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)<0, \forall x\in(a;b)$. **D.** Nếu $f'(x)<0, \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$. **II. Mức độ thông hiểu** - Biết xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó. **Ví dụ**: Chỉ ra khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ trong các khoảng dưới đây: **A.** $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-3)$ hoặc $(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;-1)$ hoặc $(3;+\infty)$. **III. Mức độ vận dụng thấp** -Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số đồng biến, nghịch biến tìm điều kiện của tham số để hàm số thường gặp đơn điệu trên một khoảng. **Ví dụ:** Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi: **A.** $m>2$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m>1$. **IV. Mức độ vận dụng cao** -Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số đồng biến, nghịch biến kết hợp phương pháp đổi biến tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng. **Ví dụ:**Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **A.** $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $m\le 0$. **C.** $1\le m<2$. **D.** $m\ge 2$.
Cực trị của hàm số	**I. Mức độ nhận biết:** -Nhớ các khái niệm: Điểm cực đại, điểm cực tiểu, điểm cực trị của hàm số. -Nhớ các điều kiện đủ để có các điểm cực trị của hàm số. - Từ bảng biến thiên nhận dạng được các điểm cực trị của hàm số, của đồ thị hàm số. **Ví dụ.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

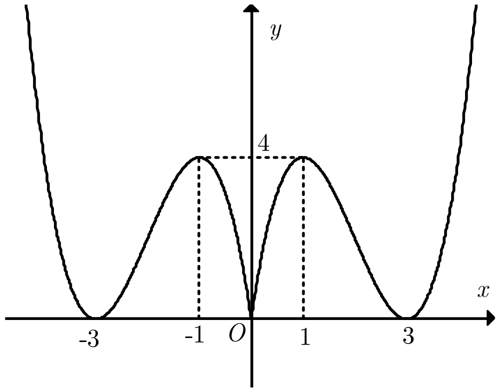
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


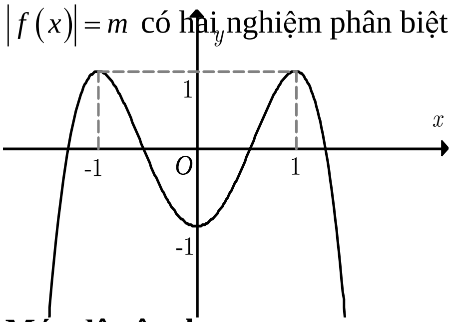
Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?
A. Hàm số có đúng một cực trị.
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
D. Hàm số đạt cực đại tại x=0 và đạt cực tiểu tại x=1.
II. Mức độ thông hiểu
- Tìm được điểm cực trị của hàm số, giá trị cực trị của hàm số và cực trị của đồ thị hàm số.
- Tìm điều kiện của tham số sao cho hàm bậc ba có hai cực trị, không có cực trị.
- Tìm điều kiện của tham số sao cho hàm bậc bốn có ba cực trị, một cực trị.
Ví dụ: Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2$ có hai điểm cực trị là:
A. (0;0) hoặc (1;-2). **B**. (0;0) hoặc (2;4).
C. (0;0) hoặc (2;-4). **D**. (0;0) hoặc (-2;-4).
III. Mức độ vận dụng thấp
Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số có cực trị tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.
Ví dụ: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.
A. m=0. **B**. m=0 hoặc m=2. **C**. m=1. **D**. m=2.
</td>
</tr>
<tr>
<td>**Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số**</td>
<td>
I. Mức độ nhận biết:
-Nhớ các khái niệm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một tập hợp số.
-Từ bảng biến thiên nhận dạng được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất(nếu có) của hàm số trên một tập hợp số.
- Từ tính chất đơn điệu của hàm số trên một đoạn, nhận dạng được GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn đó.
Ví dụ: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+5x+7$ trên đoạn $[-5;0]$ là
A. 7. B. -143. C. 6. D. 8
II. Mức độ thông hiểu
Tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất(nếu có) của hàm số trên một tập hợp số..
Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.
</td>
</tr>
</table>

	A. $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = -2$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$. **III. Mức độ vận dụng thấp** Vận dụng khái niệm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một tập hợp số tìm giá trị của tham số để hàm số có GTLN, GTNN thỏa mãn điều kiện nào đó. **Ví dụ:** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right) = \frac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ bằng -2? **A.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.
Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	**I. Mức độ nhận biết:** -Nhớ được khái niệm đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. - Nhận dạng được tiệm cận của đồ thị của hàm số khi biết một số giới hạn. - Nhận biết được số tiệm cận của một số đồ thị hàm số đơn giản. **Ví dụ:** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 2$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ? **A.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang. **B.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang. **C.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$ **D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$. **II. Mức độ thông hiểu** Tìm được tiệm cận của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn từ đó suy ra số tiệm cận của đồ thị hàm số. **Ví dụ**: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$ có: **A**. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận xiên $y = x$. **B**. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x$. **C**. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = -x$. **D**. Kết quả khác. **III. Mức độ vận dụng thấp** Vận dụng khái niệm tiệm cận của đồ thị hàm số tìm giá trị của tham số để đồ thị hàm số có tiệm cận. **Ví dụ:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{mx^2 + 2}}$ có hai tiệm cận ngang. **A.** Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **B.** $m < 0$. **C.** $m = 0$. **D.** $m > 0$.
Khảo sát sự biến	**I. Mức độ nhận biết:**

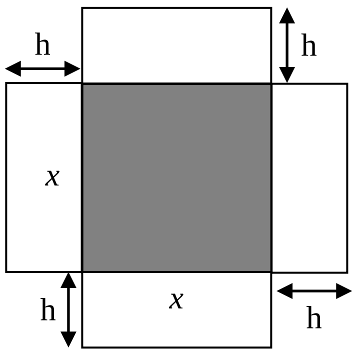
thiên và vẽ đồ thị hàm số	- Nhận dạng được đồ thị của một số hàm thường gặp qua một số đặc điểm đặc trưng của đồ thị từng loại hàm khi cho biết nhiều loại hàm. **Ví dụ:** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?  **A.** $y=-x^2-3x-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$. **C.** $y=x^4-3x^2-2$. **D.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **II. Mức độ thông hiểu** Nhận dạng được đồ thị của một số hàm thường gặp qua một số dấu hiệu như nhánh vô cực, điểm trên đồ thị, tính đơn điệu, cực trị, tiệm cận khi cho biết một số hàm cùng loại… - Từ đồ thị, biện luận theo tham số số nghiệm của phương trình. **Ví dụ:** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?  **A.** $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. **III. Mức độ vận dụng thấp** Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ tìm được đồ thị các hàm chứa dấu trị tuyệt đối liên quan. **Ví dụ**: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

<table>
<tr>
<td></td>
<td>




Hình 1 Hình 2
A. $y=-x^3+6x^2-9x$. B. $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$.
C. $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$ D. $y=|x|^3-6x^2+9|x|$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Một số bài toán thường gặp về đồ thị</td>
<td>
I. Mức độ thông hiểu
- Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị hàm số.
- Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại tiếp điểm.
Ví dụ: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Giá trị m để phương trình $\left|f(x)\right|=m$ có hai nghiệm phân biệt là:


A. $m>1$.
B. $m=1$.
C. $m<-1$.
D. $m=-1$.
II. Mức độ vận dụng :
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết điều kiện về hệ số góc hoặc đi qua một điểm.
-Vận dụng kiến thức về sự tương giao của hai đồ thị và kiến thức về phương trình tìm điều kiện của tham sao giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn điều kiện cho trước.
Ví dụ 1:
</td>
</tr>
</table>

	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương. **A.** $0<m<1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>5 \end{array}\right.$. **C.** $1<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $0<m<\dfrac{1}{3}$. **Ví dụ 2:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất. **A.** $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.
Ứng dụng thực tế	Giải quyết một số bài toán ứng dụng thực tế liên qua tới nhiều kiến thức tổng hợp như đạo hàm, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, diện tích, thể tích,.. **Ví dụ ở mức độ vận dụng thấp:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$ (kết quả khảo sát được trong tháng 8 vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ: **A.** 12. **B.** 30. **C.** 20. **D.** 15. **Ví dụ ở mức độ vận dụng cao:** Một bác thợ gò hàn muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $62,5\,dm^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh $x(dm)$, chiều cao $h(dm)$. Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất. **A.** $7(dm)$ **B.** $6(dm)$ **C.** $4(dm)$ **D.** $5(dm)$ 

ĐỀ LUYỆN TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ

Các câu hỏi sau chỉ có 1 phương án trả lời đúng. Hãy khoanh tròn vào phương án trả lời đúng đó.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 2: Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

A. $x = 2; y = 1$. **B.** $x = 1; x = 2$. **C.** $x = 1; y = 2$. **D.** $x = 1; y = 1$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m = 0$ có 2 nghiệm.

A. $m = 4$. **B.** $m < 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

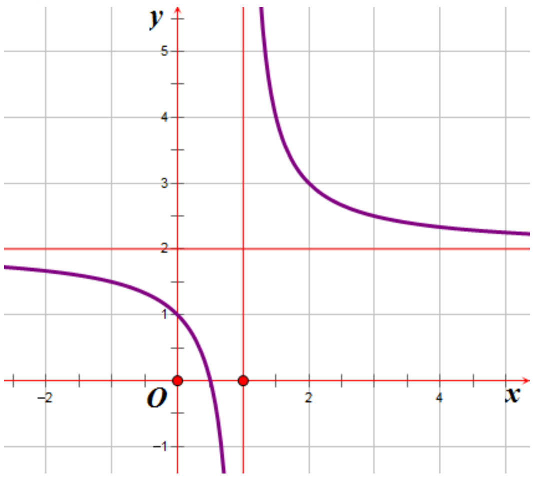
Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có các điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = \pm1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Câu 6: Xác định hàm số có đồ thị sau



A. $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

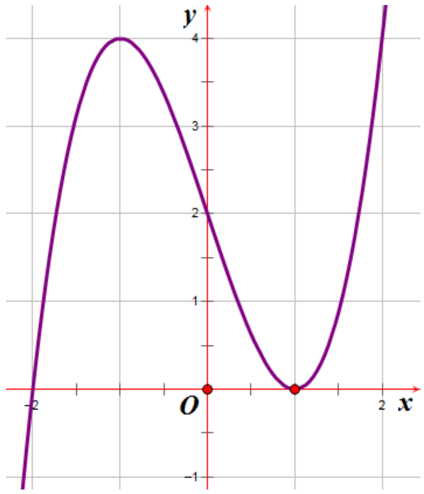
Câu 7: Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + 2m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $1 \le m < 3$. **B.** $0 \le m \le 3$. **C.** $1 < m \le 3$. **D.** $0 < m < 3$.

Câu 9: Xác định hàm số có đồ thị sau



A. $y = x^3 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 + 3x + 2$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 11: Cho đồ thị (C) có phương trình $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Tịnh tiến đồ thị (C) theo vectơ $\vec{v} = (2;1)$ ta được đồ thị (C'). Tìm phương trình của đồ thị (C').

A. $y = \dfrac{3x-6}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{3x-5}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{3x-5}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{3x+5}{x-1}$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = x + m$ cắt đồ thị (C): $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

A. $m = -1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 2$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để một tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2mx+3}{x-m}$ (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 10.

A. $m = 2$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = \pm 2$.

Câu 14: Một công ty sữa cần làm hộp sữa hình trụ, có thể tích 0,2 (lít). Tính bán kính đáy hộp để công ty tốn ít nguyên liệu làm hộp nhất.

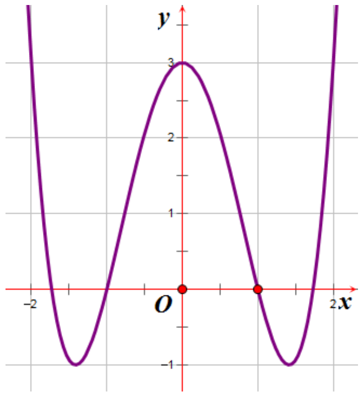
A. $\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$ (cm). **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ (dm). **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{250}{\pi}}$ (dm). **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}$ (cm).

Câu 15: Tìm hàm số không có cực trị trong các hàm số cho dưới đây.

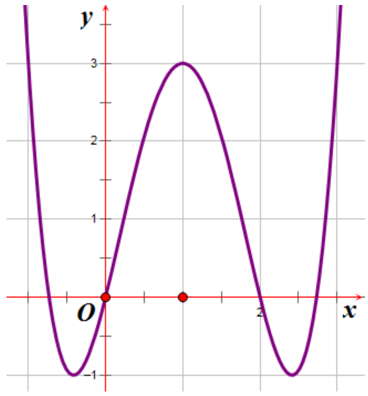
A. $y = x^3 - 3x + 2$. **B.** $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị (H1) như hình vẽ. Tìm hàm số có đồ thị (H2) trong các hàm số cho dưới đây.



(H1)



(H2)

A. $y=(x-1)^4-4(x-1)^2+3.$ **B.** $y=x^4-4x^2+2.$

C. $y=(x+1)^4-4(x+1)^2+3.$ **D.** $y=x^4-4x^2+4.$

Câu 17: Cho $y\geq 0; x^2+x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $P=4x+y-xy+2$.

A. $m=6$ và $M=10.$ **B.** $m=-10$ và $M=6.$

C. $m=-6$ và $M=10.$ **D.** $m=-10$ và $M=10.$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số $y=x^3-3x^2-\left(m^2-m-2\right)x+9$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

A. $-1<m<2.$ **B.** $-1\leq m\leq 2.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2\end{array}\right.$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho $OB=2OA$ (O là gốc tọa độ).

A. $\left[\begin{array}{l} y=2x-3 \\ y=2x+3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=2x-\frac{7}{2}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-2x-3 \\ y=-2x+3\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-2x+1 \\ y=-2x-\frac{7}{2}\end{array}\right.$.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4-2m^2x^2+3m+2$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

A. $m=0.$ **B.** $m=\pm 1.$ **C.** $m=2.$ **D.** $m=-2.$

Câu 21: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) : $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+10$ (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

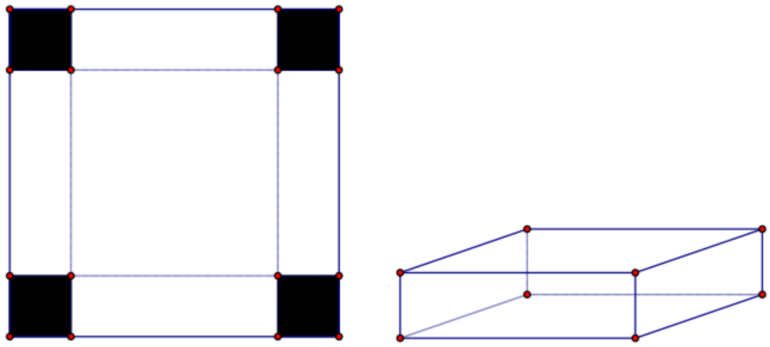
A. $m=1.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=-2.$ **D.** $m=0.$

Câu 23: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

A. $(-\infty;-1)$ và $(0;1).$ **B.** $\mathbb{R}.$

C. $(-\infty;-1)\cup(0;1).$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{(-1;0)\cup(1;+\infty)\}.$

Câu 24: Từ một tấm tôn hình vuông cạnh 15(cm) người ta cắt ở mỗi góc tấm tôn một hình vuông nhỏ rồi gò thành một cái hộp (hình hộp chữ nhật) không có nắp như hình vẽ dưới đây. Tìm thể tích lớn nhất của hộp.



A. $400(cm^3)$. **B.** $300(cm^3)$. **C.** $250(cm^3)$. **D.** $200(cm^3)$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $\left[0; \sqrt{5}\right]$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 9$. **C.** $M = 3$. **D.** $M = 8$.

------------- HẾT ----------

ĐÁP ÁN

Câu 1	D	**Câu 6**	A	**Câu 11**	A	**Câu 16**	A	**Câu 21**	D
Câu 2	C	**Câu 7**	B	**Câu 12**	B	**Câu 17**	D	**Câu 22**	D
Câu 3	D	**Câu 8**	A	**Câu 13**	B	**Câu 18**	B	**Câu 23**	A
Câu 4	C	**Câu 9**	C	**Câu 14**	D	**Câu 19**	B	**Câu 24**	C
Câu 5	C	**Câu 10**	A	**Câu 15**	C	**Câu 20**	B	**Câu 25**	D

Tên các trường thực hiện Chuyên đề Hàm số:

1) **Trường THPT Chuyên Tuyên Quang**
2) **Trường THPT Yên Hoa**
3) **Trường THPT Hòa Phú**