

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN LỚP 11

QUAN HỆ SONG SONG

I. Kiến thức cơ bản

1. Hai đường thẳng song song :

Sử dụng một trong các cách sau :

- Chứng minh a và b đồng phẳng và không có điểm chung
- Chứng minh a và b phân biệt và cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh a và b đồng phẳng và áp dụng các tính chất của hình học phẳng (cạnh đối của hình bình hành, định lý talet ...)
- Sử dụng các định lý
- Chứng minh bằng phản chứng

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

$$\text{Phương pháp } \begin{cases} d \not\subset \alpha \\ d // a \\ a \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow d // \alpha$$

3. Hai mặt phẳng song song

$$\text{Phương pháp } \begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a // (\beta), b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

$$\text{Phương pháp } \begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ c \cap d = N \\ a // c, b // d \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

II. Kỹ năng cơ bản

Học sinh vẽ nhanh và chính xác hình vẽ, nhận dạng nhanh yêu cầu của bài toán

Học sinh nhìn nhận hình vẽ chính xác

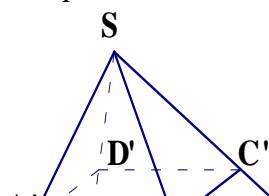
III. Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung

điểm các cạnh SA, SB, SC, SD.

a. Chứng minh A'B'C'D' là hình gì

b. Gọi M là điểm bất kì trên BC. Tìm thiết diện của (A'B'M) với hình chóp S.ABCD





Giải

a. Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành :

Trong tam giác SAB, ta có : $A'B' \parallel \frac{1}{2} AB$

Trong tam giác SCD, ta có : $C'D' \parallel \frac{1}{2} CD$

$$\Rightarrow A'B' \parallel C'D'$$

Vậy : $A'B'C'D'$ là hình bình hành

b. Tìm thiết diện của $(A'B'M)$ với hình chóp S.ABCD:

Ta có : $AB \parallel A'B'$ và M là điểm chung của $(A'B'M)$ và (ABCD)

Do đó giao tuyến của $(A'B'M)$ và (ABCD) là Mx song song AB và $A'B'$

Gọi $N = Mx \cap AD$

Vậy : thiết diện là hình thang $A'B'MN$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thang với cạnh đáy AB và CD ($AB > CD$).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB

a. Chứng minh : $MN \parallel CD$

b. Tìm $P = SC \cap (ADN)$

c. Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I.

Chứng minh : $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác SABI là hình gì ?

Giải

a. Chứng minh : $MN \parallel CD$:

Trong tam giác SAB, ta có : $MN \parallel AB$

Mà $AB \parallel CD$ (ABCD là hình thang)

Vậy : $MN \parallel CD$

b. Tìm $P = SC \cap (ADN)$:

- Chọn mp phụ $(SBC) \supset SC$

- Tìm giao tuyến của (SBC) và (ADN)

Ta có : N là điểm chung của (SBC) và (ADN)

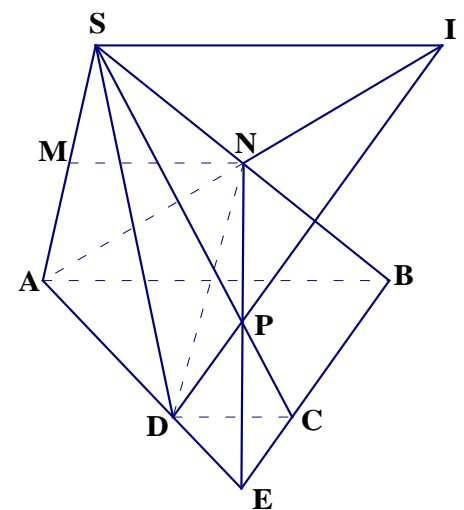
Trong (ABCD), gọi $E = AD \cap BC$

$$\Rightarrow (SBC) \cap (ADN) = NE$$

- Trong (SBC) , gọi $P = SC \cap NE$

Vậy : $P = SC \cap (ADN)$

c. Chứng minh : $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác SABI là hình gì ?





$$\text{Ta có : } \begin{cases} SI = (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow SI // AB // CD \text{ (theo định lí 2)}$$

Xét $\triangle ASI$, ta có : $SI // MN$ (vì cùng song song AB) M là trung điểm AB

$$\Rightarrow SI // 2MN \quad \text{Mà } AB // 2.MN \quad \text{Do đó : } SI // AB$$

Vậy : tứ giác $SABI$ là hình bình hành

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành .Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD .

a. Chứng minh $MN // (SBC)$, $MN // (SAD)$

b. Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP)

c. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$. Chứng minh $G_1G_2 // (SAB)$

a. Chứng minh $MN // (SBC)$:

$$\text{Ta có : } \begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ MN // BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SBC)$$

$$\text{Tương tự : } \begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ MN // AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAD)$$

b. Chứng minh $SB // (MNP)$:

$$\text{Ta có : } \begin{cases} SB \not\subset (MNP) \\ SB // MP \\ MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SB // (MNP)$$

Chứng minh $SC // (MNP)$:

Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD)

Ta có : P là điểm chung của (MNP) và (SAD)

$$MN // AD$$

Do đó giao tuyến là đường thẳng qua P song song MN cắt SD tại Q

$$\Rightarrow PQ = (MNP) \cap (SAD)$$

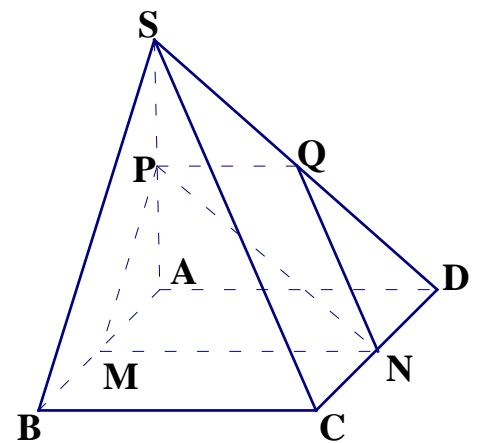
Xét $\triangle SAD$, Ta có : $PQ // AD$, P là trung điểm SA

$$\Rightarrow Q \text{ là trung điểm } SD$$

Xét $\triangle SCD$, Ta có : $QN // SC$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} SC \not\subset (MNP) \\ SC // NQ \\ NQ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SC // (MNP)$$

c. Chứng minh $G_1G_2 // (SAB)$:





Xét ΔSAI , ta có: $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow G_1G_2 \parallel SA$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB) \\ G_1G_2 \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SAB)$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên AB, CD . Mặt phẳng (α) qua $MN \parallel SA$

- Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) và (SAC) .
- Xác định thiết diện của hình chóp với (α)
- Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang

Giải

a. Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ \alpha \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP \text{ với } MP \parallel SA$$

Tìm các giao tuyến của (α) với (SAC) :

$$\text{Gọi } R = MN \cap AC$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ \alpha \parallel SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ \text{ với } RQ \parallel SA$$

Thiết diện là tứ giác $MPQN$

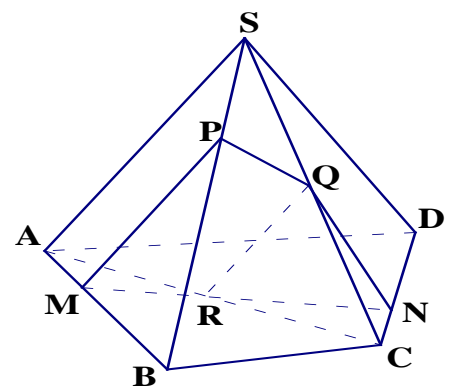
c. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang:

$$\text{Ta có: } MPQN \text{ là hình thang} \Rightarrow \begin{cases} MP \parallel QN & (1) \\ MN \parallel PQ & (2) \end{cases}$$

$$\text{Xét (1), ta có } \begin{cases} SA \parallel MP \\ MP \parallel QN \end{cases} \Rightarrow SA \parallel QN$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} SA \parallel QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (SCD) \text{ (vô lí)}$$

$$\text{Xét (2), ta có } \begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$$





Ngược lại, nếu $MN \parallel BC$ thì
$$\begin{cases} PQ = \alpha \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$$

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN \parallel BC$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD

- Chứng minh rằng : $(OMN) \parallel (SBC)$
- Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB .

Chứng minh : $PQ \parallel (SBC), (MOR) \parallel (SCD)$

Giải

a. Chứng minh rằng : $(OMN) \parallel (SBC)$:

Xét tam giác SAC và SDB :

Ta có :
$$\begin{cases} OM \parallel SC \\ ON \parallel SB \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$$

b. Chứng minh : $PQ \parallel (SBC)$

Ta có :
$$\begin{cases} OP \parallel AD \\ AD \parallel MN \end{cases} \Rightarrow OP \parallel MN$$

$\Rightarrow M, N, P, O$ đồng phẳng

$\Rightarrow PQ \subset (MNO)$

Mà
$$\begin{cases} PQ \subset (MNO) \\ (MNO) \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel (SBC)$$

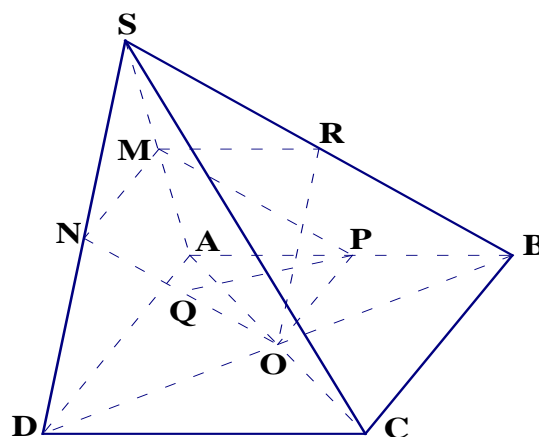
Vậy : $PQ \parallel (SBC)$

Chứng minh : $PQ \parallel (SBC), (MOR) \parallel (SCD)$:

Ta có :
$$\begin{cases} MR \parallel AB \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow MR \parallel DC \quad (1)$$

Xét tam giác SDB : ta có $OR \parallel SD \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta được
$$\begin{cases} MR \parallel DC \text{ và } OR \parallel SD \\ MR \subset (MOR) \text{ và } OR \subset (MOR) \\ DC \subset (SCD) \text{ và } SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (MOR) \parallel (SCD)$$

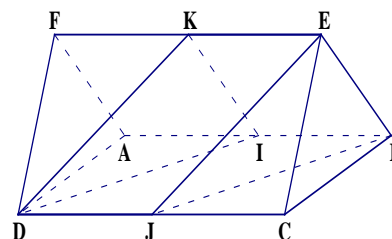


Bài 6. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF . Chứng minh :

- $(ADF) \parallel (BCE)$
- $(DIK) \parallel (JBE)$

Giải

a. $(ADF) \parallel (BCE)$:





$$\text{Ta có : } \begin{cases} AD // BC \\ AD \not\subset (BCE) \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD // (BCE) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \begin{cases} AF // BE \\ AF \not\subset (BCE) \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF // (BCE) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được :

$$\begin{cases} AD // (BCE) \\ AF // (BCE) \\ AD \subset (ADF) \text{ và } AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) // (BCE)$$

Vậy : $(ADF) // (BCE)$

b. $(DIK) // (JBE)$:

$$\text{Ta có : } \begin{cases} DI // JB \\ IK // BE \end{cases} \Rightarrow (DIK) // (JBE)$$

Vậy : $(DIK) // (JBE)$

IV. Bài tập TNKQ

Câu 1: Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a // b$
- B. Nếu $a // b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$
- C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$
- D. Nếu a và b cùng nằm trong mp $(\alpha) // c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector \overrightarrow{SB} và \overrightarrow{AC} ?

- A. 60°
- B. 120°
- C. 45°
- D. 90°

Câu 3: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác MNPQ là hình gì?

- A. Hình bình hành.
- B. Hình chữ nhật.
- C. Hình vuông.
- D. Hình thang.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{IJ} ?

- A. 120°
- B. 90°
- C. 60°
- D. 45°

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

- A. 90°
- B. 45°
- C. 30°
- D. 60°

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector \overrightarrow{SC} và \overrightarrow{AB} ?

- A. 120°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 90°

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:



A. 45^0

B. 30^0

C. 90^0

D. 60^0

Câu 8: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể sai?

A. $A'C' \perp BD$

B. $BB' \perp BD$

C. $A'B \perp DC'$

D. $BC' \perp A'D$

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

B. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b)

Câu 10: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa cặp vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{EG} ?

A. 90^0

B. 60^0

C. 45^0

D. 120^0

Câu 11: Cho tứ diện ABCD đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$

D. $\alpha = 60^0$

Câu 12: Cho tứ diện ABCD có $AB = a$, $BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

B. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

C. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

D. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng

Câu 14: Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(\overline{AB}, \overline{DM})$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 15: Cho tứ diện ABCD có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng:

A. 30^0

B. 45^0

C. 60^0

D. 90^0

Câu 16: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

C. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng.

D. Cho hai đường thẳng a và b, nếu a vuông góc với c thì b cũng vuông góc với c

Câu 17: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại



- B.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau
C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau
D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia

Câu 18: Cho tứ diện ABCD với $AC = \frac{3}{2}AD$; $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

- A.** $\cos \varphi = \frac{3}{4}$ **B.** $\varphi = 60^\circ$ **C.** $\varphi = 30^\circ$ **D.** $\cos \varphi = \frac{1}{4}$

Câu 19: Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = a$, $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD).

Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

- A.** 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Câu 20: Cho tứ diện ABCD với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

- A.** 90° **B.** 60° **C.** 30° **D.** 45°

Câu 21: Cho tứ diện ABCD. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$

- A.** $k = 1$ **B.** $k = 2$ **C.** $k = 0$ **D.** $k = 4$

Câu 22: Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng?

- A.** $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ **B.** $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$
C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ **D.** $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

Câu 23: Cho tứ diện ABCD có $DA = DB = DC$ và $\widehat{BDA} = 60^\circ$, $\widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{ADB} = 120^\circ$. Trong các mặt của tứ diện đó:

- A.** Tam giác ABD có diện tích lớn nhất **B.** Tam giác BCD có diện tích lớn nhất
C. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất **D.** Tam giác ABC có diện tích lớn nhất

Câu 24: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 25: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A.** Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a,b). **B.** Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.
C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c. **D.** Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

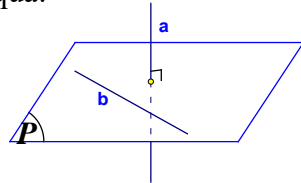
I. Kiến thức cơ bản

1. Hai đường thẳng vuông góc với nhau

C1 : Dùng các quan hệ vuông góc đã biết trong mặt phẳng.

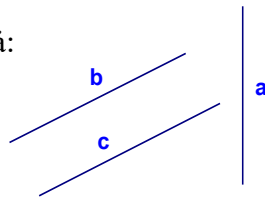
C2 : $a \perp b \Leftrightarrow \text{góc}(a; b) = 90^\circ$.

C3: Dùng hệ quả:



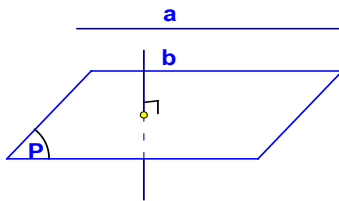
$$\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b$$

C4: Dùng hệ quả:



$$b \parallel c, a \perp b \Rightarrow a \perp c$$

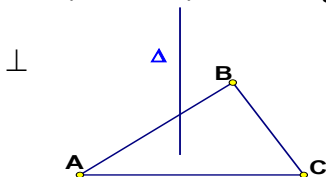
C5 : Dùng hệ quả:



$$\left. \begin{array}{l} a \text{ song song } (P) \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b$$

C6 : Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

C7: Dùng hệ quả: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì vuông góc với cạnh còn lại của tam giác



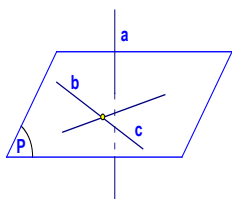
$$\left. \begin{array}{l} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp BC$$

C8: $a \perp b$ khi 2 vtcp của 2 đt đó vuông góc.

Chú ý: Định lý hàm số cosin $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$; $\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC}$

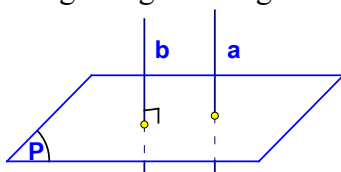
2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

C1 : Dùng định lý: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng



$$b, c \text{ cắt nhau}, b, c \subset (P), a \perp b, a \perp c \Rightarrow a \perp (P)$$

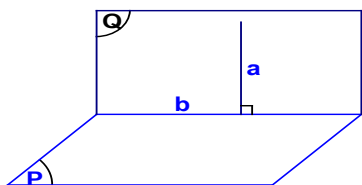
C2 : Dùng hệ quả: Cho hai đường thẳng // nếu đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng thì đường thẳng kia cũng vuông góc với mặt phẳng





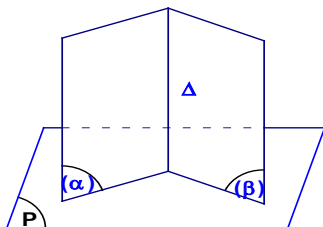
$$a // b, b \perp (P) \Rightarrow a \perp (P)$$

C3 : Dùng hệ quả: Cho hai mặt phẳng vuông góc theo giao tuyến b , nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến b thì đường thẳng a cũng vuông góc với mặt phẳng kia



$$\left. \begin{array}{l} (P) \cap (Q) = b \\ a \subset (Q), a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$$

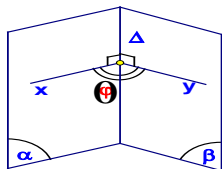
C4 : Dùng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó



$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ (\alpha) \perp (P), (\beta) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp (P)$$

3. Mặt phẳng vuông góc mặt phẳng.

C1 : Chứng minh góc giữa chúng là một vuông.



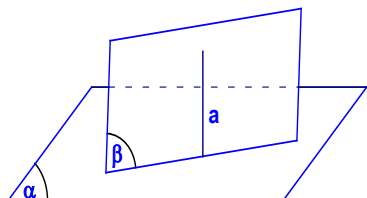
$$\bullet (\alpha) \cap (\beta) = \Delta, Ox \subset (\alpha), Ox \perp \Delta, Oy \subset (\beta), Oy \perp \Delta$$

Khi đó:

$$\text{góc } ((\alpha); (\beta)) = \text{góc } (Ox; Oy) = \widehat{xOy} = \varphi : 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

$$\bullet (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$$

C2 : Dùng hệ quả: Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.



$$\left. \begin{array}{l} a \subset (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

II. Kỹ năng cơ bản

Học sinh vẽ nhanh và chính xác hình vẽ

Học sinh nhìn nhận hình vẽ chính xác

III. Bài tập luyện tập

Bài 1 : Cho tứ diện ABCD đều. Chứng minh AB vuông góc với CD

Hướng dẫn tóm tắt: dùng tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

C2: Gọi M là tđ của AB , CM cho $AB \perp (MCD)$

Bài 2 : Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, góc $SAC =$ góc SAB . M là trung điểm BC . C/M

a. AM vuông góc với BC và SM vuông góc với BC

b. SA vuông góc với BC

Hướng dẫn tóm tắt: a. ΔABC cân $\Rightarrow AM \perp BC$.

b. $\Delta SAB = \Delta SAC$ (cgc) $\Rightarrow SB = SC \Rightarrow SM \perp BC$

Bài 3 : Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

a. CM: $AO \perp CD$

b. Tính góc giữa 2 đt AB và CD

Hướng dẫn tóm tắt: a. $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp CD$

b. Gọi M là tđ $CD \Rightarrow AM \perp CD$, lại có $AO \perp CD \Rightarrow CD \perp (AMB)$

$\Rightarrow CD \perp AB$

Bài 4 : Cho tứ diện ABCD có 2 mặt ABC và DBC là hai tam giác **cân** chung đáy BC . Gọi I là trung điểm BC .

a. chứng minh BC vuông góc AD

b. kẻ AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh AH vuông góc với $mp(BCD)$

Hướng dẫn tóm tắt:

a. $BC \perp DI$ và $BC \perp AI$ nên $BC \perp AD$

b. $AH \perp DI$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (BCD)$

Bài 5 : Cho hình chóp $SABC$. SA vuông góc với đáy (ABC) và đáy là tam giác vuông tại B .

a. cm $BC \perp SB$

b. Từ A kẻ 2 đường cao AH, AK trong tam giác SAB và SAC . Cm: $AH \perp (SBC)$, $SC \perp (AHK)$

Hướng dẫn tóm tắt:

a. $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp SB$

b. $AH \perp SB$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$

$AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$

Bài 7 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC , α cắt SC tại I .

a. Xác định giao điểm của SO và (α)

b. Cm: BD vuông góc SC . Xét vị trí tương đối của BD và (α)

c. Xác định giao tuyến của (SBD) và (α)

Hướng dẫn tóm tắt:

a. J là giao điểm của AI và SO thì J là giao điểm của SO và (α)

b. $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp SC$

c. giao tuyến là đt qua J và song song với BD

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại B

a. cm: $(SAC) \perp (ABC)$

b. Gọi H là hình chiếu của A lên SC . K là hình chiếu của A lên SB . cm $(AHK) \perp (SBC)$



Hướng dẫn tóm tắt:

a. Trong (SAC) có $SA \perp (ABC)$ suy ra đpcm

b. Trong (AHK) có $AK \perp (SBC)$ suy ra đpcm

Bài 9 : Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm BC, D là điểm đối xứng của A qua I. dựng

đoạn $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với (ABC). cm

a. $(SBC) \perp (SAD)$

b. $(SAB) \perp (SAC)$

Hướng dẫn tóm tắt:

a. Trong tam giác (SBC) có $BC \perp (SAD)$ suy ra đpcm

b. $\triangle SAB = \triangle SAC$. Trong $\triangle SAC$ kẻ đg cao $CK \perp SA$, Trong tam giác SAB kẻ đg cao

$BK \perp SA$. 2 tam giác vuông SDA và IKA đồng dạng $\Rightarrow \frac{IK}{SD} = \frac{IA}{SA} \Rightarrow IK = \frac{a}{2}$ suy ra tam giác BKC vuông tại K.

IV. Bài tập TNKQ

Câu 1: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$, Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$

B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$

D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$

Câu 2: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a = 12, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. $36\sqrt{2}$

B. 40

C. $36\sqrt{3}$

D. 36

Câu 3: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. Vô số

B. 2

C. 3

D. 1

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD

B. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB

C. Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB

D. Góc giữa AC và (ABD) là góc CAB

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC thỏa mãn $SA = SB = SC$. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(SBH) \cap (SCH) = SH$

B. $(SAH) \cap (SBH) = SH$

C. $AB \perp SH$

D. $(SAH) \cap (SCH) = SH$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trung điểm của AC.

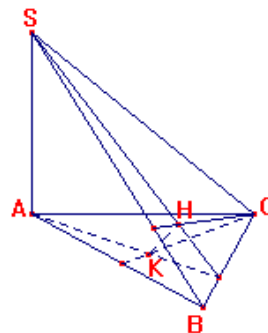
B. H trùng với trục tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.

D. H trùng với trung điểm của BC

Câu 7 Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. $BC \perp (SAH)$.
 B. $HK \perp (SBC)$.
 C. $BC \perp (SAB)$.
 D. SH, AK và BC đồng quy.



Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC , SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

- A. Hình thang cân B. Hình thang vuông C. Hình bình hành D. Tam giác vuông

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây **sai** ?

- A. $BD \perp SC$ B. $IO \perp (ABCD)$.
 C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD D. $SA = SB = SC$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và $mp(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 60^\circ$

Câu 11: Cho hình chóp $SABC$ có các mặt bên nghiêng đều trên đáy. Hình chiếu H của S trên (ABC) là:

- A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
C. Trọng tâm tam giác ABC . D. Giao điểm hai đường thẳng AC và BD .

Câu 12: Khẳng định nào sau đây **sai** ?

- A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
 B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α)
 C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$
 D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$

Câu 13: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.
 B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.
 C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
D. Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c) .

Câu 14: Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Số các mặt của tứ diện $SABC$ là tam giác vuông là:

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB , cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình thang vuông B. Hình thang cân C. Hình bình hành D. Hình chữ nhật

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. AE và AF là các đường cao của tam giác SAB và SAD, Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

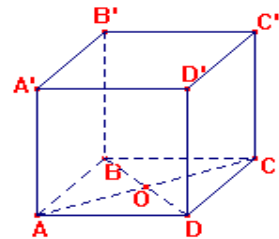
A. $SC \perp (AFB)$

B. $SC \perp (AEC)$

C. $SC \perp (AED)$

D. $SC \perp (AEF)$

Câu 18: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Có đáy là hình thoi $\hat{A}=60^\circ$ và $A'A = A'B = A'D$. Gọi $O = AC \cap BD$. Hình chiếu của A' trên (ABCD) là :



A. trung điểm của AO.

B. trọng tâm $\triangle ABD$.

C. giao của hai đoạn AC và BD.

D. trọng tâm $\triangle BCD$.

Câu 19: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$

D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với trung tuyến SM của tam giác SBC. Thiết diện của (P) và hình chóp S.ABC có diện tích bằng?

A. $\frac{a^2 \sqrt{6}}{8}$

B. $\frac{a^2}{6}$

C. a^2

D. $\frac{a^2 \sqrt{16}}{16}$

Câu 21: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P).

B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc thuộc mặt phẳng (P).

C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.

D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và (ABCD)

A. 30°

B. 60°

C. 75°

D. 45°

Câu 23: Cho tứ diện ABCD có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $AB \perp (ABC)$

B. $BC \perp AD$

C. $CD \perp (ABD)$

D. $AC \perp BD$

Câu 24: Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. H là trực tâm tam giác ABC.

B. $OA \perp BC$.

C. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$

D. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Câu 25: Cho hình chóp S.ABC thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. H là trực tâm tam giác ABC.

B. H là trọng tâm tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

KHOẢNG CÁCH

I. Kiến thức cơ bản

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa mặt phẳng và đường thẳng //

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai Đường thẳng chéo nhau

II. Kỹ năng cơ bản

Học sinh vẽ nhanh và chính xác hình vẽ

Học sinh nhìn nhận hình vẽ chính xác

Kỹ năng xác định nhanh khoảng cách từ hình vẽ

III. Bài tập luyện tập

Bài 1 : Cho tứ diện S.ABC, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$, cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$

- CM: $(SAB) \perp (SBC)$
- Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC); C đến (SAB); B đến (SAC)
- Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến mp(SBC)
- Gọi D, E là trung điểm của BC và SC tính khoảng cách từ A đến SD, k/c từ E đến AB

Hướng dẫn tóm tắt:

a. $BC \perp (SAB)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$

b. *Trong tam giác SAB kẻ $AH \perp SB$, $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

* $d(C; (SAB)) = CB = a\sqrt{2}$; $d(B; (SAC)) = BO = a$ với O là t điểm AC.

c. Gọi I là tđ AB $\Rightarrow IO \parallel BC \Rightarrow IO \parallel (SBC) \Rightarrow d(O; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

d. tam giác SDA vuông tại A, kẻ $AK \perp SD$ thì $AK = d(A; SD) = \frac{a\sqrt{35}}{7}$

Bài 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 4$, $SA \perp (ABCD)$ & $SA = 5$. Tính các khoảng cách từ:

- A đến (SBD)
- A đến (SBC)
- O đến (SBC)

Hướng dẫn tóm tắt:

a. Kẻ $AI \perp BD \Rightarrow BD \perp SI$, trong (SAI) kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBD)$; $AH \cdot SI = AB \cdot AI$

$$AI = \frac{12}{5}; SI = \frac{\sqrt{769}}{5}; AH = \frac{60}{\sqrt{769}}$$

$$b. d(A; (SBC)) = \frac{15}{\sqrt{34}}$$



$$c. M \text{ là t đ của } AB \Rightarrow OM \parallel (SBC) \text{ nên } d(O; (SBC)) = d(M; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{15}{2\sqrt{34}}$$

Bài 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy SA \perp (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B.

$$AB = BC = \frac{AD}{2} = a, SA = a$$

- CM các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông
- Tính k/c từ A đến mp(SBC)
- Tính khoảng cách từ B đến đt SD

Hướng dẫn tóm tắt:

$$b. d(A; (SBC)) = a/\sqrt{2}$$

$$c. \text{ tam giác SBD cân tại D; I là tđ SB; } DI = 3a\sqrt{2}/2; S_{SBD} = 3a^2/2 \Rightarrow d(b; SD) = 3a/\sqrt{5}$$

IV. Bài tập TNKQ

Câu 1: Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy là:

- A. a B. $a\sqrt{2}$ C. 1,5a D. $a\sqrt{3}$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ AD đến mp(SBC) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{3a}{2}$ D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Câu 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD) là:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 5: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và B'C' là:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 6: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách từ C đến AC' là:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy có tâm O và cạnh bằng a, cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ O đến (SAD) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{a}{\sqrt{6}}$ D. a

Câu 8: Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết SA = 3a, AB = $a\sqrt{3}$, BC = $a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:

- A. $2a\sqrt{3}$ B. $a\sqrt{3}$ C. $a\sqrt{2}$ D. 2a



Câu 9: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng bao nhiêu?

- A. $2a$ **B.** $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{3a}{2}$ D. $a\frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC

- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Câu 11: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $a\sqrt{\frac{3}{10}}$ D. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$

Câu 12: Cho hình thang vuông ABCD vuông ở A và D, $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với (ABCD) lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

- A. $a\sqrt{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Câu 13: Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Khoảng cách giữa OA và BC bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. a **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC, M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ I đến CM bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ B. $a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ C. $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ D. $a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Câu 15: Cho hình chóp A.BCD có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$ **B.** $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 16: Cho tứ diện SABC trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a$, $SB = a$, $SC = 2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

- A.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{5a\sqrt{6}}{6}$

Câu 17: Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 18: Cho tứ diện ABCD có $AC = BC = AD = BD = a$, $CD = b$, $AB = c$. Khoảng cách giữa AB và CD là?

- A.** $\frac{\sqrt{3a^2 - b^2 - c^2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{4a^2 - b^2 - c^2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2a^2 - b^2 - c^2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{2}$

Câu 19: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

- A. $\frac{2a}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $2a$



Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là:

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 21: Hình tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = AC = AD = 3$. Diện tích tam giác BCD bằng

A. 27

B. $\frac{27}{2}$

C. $\frac{9\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Câu 22: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a, AC = 2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 24: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' là?

A. $\frac{4ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

B. $\frac{3ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

C. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

D. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = a$. khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{\sqrt{6}}$

B. $\frac{a}{\sqrt{7}}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{\sqrt{5}}$

MA TRẬN ĐỀ

Chủ đề Chuẩn KTKN	Cấp độ tư duy				Cộng
	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao	
Quan hệ song song.	Câu 1,2,3 Điểm 1,2 Tỉ lệ 12%	Câu 4,5,6 Điểm 1,2 Tỉ lệ 12%	Câu 7,8 Điểm 0,8 Tỉ lệ 8%		8 Điểm 3,2 Tỉ lệ 32%
Quan hệ vuông góc	Câu 9,10,11 Điểm 1,2 Tỉ lệ 12%	Câu 12,13,14 Điểm 1,2 Tỉ lệ 12%	Câu 15,16 Điểm 0,8 Tỉ lệ 8%	Câu 17 Điểm 0,4 Tỉ lệ 4%	9 Điểm 3,6 Tỉ lệ 36%
Khoảng cách và góc	Câu 18,19,20 Điểm 1,2 Tỉ lệ 12%	Câu 21,22 Điểm 0,8 Tỉ lệ 8%	Câu 23,24 Điểm 0,8 Tỉ lệ 8%	Câu 25 Điểm 0,4 Tỉ lệ 4%	8 Điểm 3,2 Tỉ lệ 32%
Cộng	9 Điểm 3,6 Tỉ lệ 36%	8 Điểm 3,2 Tỉ lệ 32%	6 Điểm 2,4 Tỉ lệ 24%	2 Điểm 0,8 Tỉ lệ 8%	25 Điểm 10 Tỉ lệ 100%

ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Ba điểm phân biệt luôn cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.
- B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- C. Ba điểm bất kì chỉ thuộc một mặt phẳng.
- D. Có đúng một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước.

Câu 2. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa.
- B. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua hai đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua hai đường thẳng cắt nhau có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua hai đường thẳng song song có duy nhất một mặt phẳng.

Câu 4. Trong mặt phẳng (α) , cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm S $\notin (\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong bốn điểm nói trên?

- A. 4.
- B. 5.
- C. 6.
- D. 8.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Lấy điểm I đối xứng với C qua trung điểm của cạnh AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $I \in (ABC)$.
- B. $(ABC) \equiv (IBC)$.
- C. $CI \notin (ABC)$.
- D. $AI \subset (ABC)$.



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $AC \cap BD = I, AB \cap CD = J, AD \cap BC = K$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $(SAC) \cap (SCD) = SI$. B. $(SAB) \cap (SCD) = SJ$.
C. $(SAD) \cap (SBC) = SK$. D. $(SAC) \cap (SAD) = AB$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' , $\Delta = (AMN) \cap (A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\Delta // AB$ B. $\Delta // AC$ C. $\Delta // BC$ D. $\Delta // AA'$

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H lần lượt là trung điểm của AB. Đường thẳng BC song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (AHC') B. $(AA'H)$ C. (HAB) D. $(HA'C')$

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp véc tơ nào bằng 60° :

- A. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF})$ B. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DG})$
C. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EH})$ D. $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG})$

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh bằng a. Giá trị $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FG}$ bằng:

- A. $2a^2$ B. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$ C. $\sqrt{2}a^2$ D. $-a^2$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh bằng a. Giá trị $\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2a}$ C. $\sqrt{2}a$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M là trung điểm CD. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. $AB \perp CD$ B. $AB \perp BM$ C. $AM \perp BM$ D. $AB \perp BD$

Câu 13: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. $AB \perp ND$ B. $MN \perp AD$ C. $MN \perp CD$ D. $CD \perp BM$

Câu 14: Cho tứ diện ABCD có BCD tam giác đều cạnh bằng a và $AB \perp (BCD)$, $AB = \sqrt{3}a$. Gọi M là trung điểm của CD. Góc giữa 2 đường thẳng AM và BM bằng:

- A. 48° B. $\approx 63^\circ$ C. 60° D. $\approx 67^\circ$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và ABCD là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD. Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng:

- A. $\frac{a^2}{2}$ B. $-\frac{a^2}{2}$ C. $\frac{a^2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và ABCD là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. $SA \perp (ABCD)$ B. $AC \perp (SBC)$
C. $AC \perp (SBD)$ D. $AC \perp (SCD)$

Câu 17: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. $CM \perp (ABD)$ B. $AB \perp (MCD)$
C. $AB \perp (BCD)$ D. $DM \perp (ABC)$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng:

A. $\approx 65^\circ$

B. $\approx 70^\circ$

C. $\approx 74^\circ$

D. $\approx 75^\circ$

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc nào:

A. \widehat{BSC}

B. \widehat{SCB}

C. \widehat{SCA}

D. \widehat{ASC}

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và đáy là hình thoi tâm O. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) là góc giữa cặp đường thẳng nào:

A. (SB, SA)

B. (SB, AB)

C. (SB, SO)

D. (SB, SA)

Câu 21: Cho tứ diện ABCD có BCD tam giác đều cạnh bằng a và $AB \perp (BCD)$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Góc giữa đường thẳng AM và mặt phẳng (BCD) bằng:

A. 45°

B. $\approx 49^\circ$

C. $\approx 53^\circ$

D.

$\approx 43^\circ$

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và ABCD là hình vuông. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy là góc giữa cặp đường thẳng nào:

A. (SA, AC)

B. (SA, AB)

C. (SA, SC)

D.

(SA, BD)

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $\widehat{(BC, SD)} = 30^\circ$

B. $\widehat{(BC, SD)} = 45^\circ$

C. $\widehat{(BC, SD)} = 60^\circ$

D. $\widehat{(BC, SD)} = 90^\circ$

Câu 24: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\widehat{(AB, CD)} = 30^\circ$

B. $\widehat{(AB, CD)} = 45^\circ$

C. $\widehat{(AB, CD)} = 60^\circ$

D. $\widehat{(AB, CD)} = 90^\circ$

Câu 25: Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, $NQ = a\sqrt{3}$. Tìm góc giữa đường AB và CD?

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

ĐÁP ÁN

1-B	2-C	3-B	4-C	5-C	6-D	7-C
8-A	9-B	10-D	11-A	12-A	13-C	14-B
15-A	16-C	17-B	18-B	19-A	20-C	21-B
22-A	23-B	24-C	25-B			