



## CHUYÊN ĐỀ 3

### NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

#### CHỦ ĐỀ 1: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

#### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

##### 1. Nguyên hàm

+ Định nghĩa :  $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

+ Tính chất : 1/  $\int f'(x)dx = f(x) + C$

$$2/ \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$3/ \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

+ Bảng nguyên hàm

$\int dx = x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int 0 dx = C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$

##### 2. Tích phân:

+ Định nghĩa :  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

+ Tính chất :

$$1/ \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$4/ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$2/ \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$5/ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$$

$$3/ \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

##### 3. Các phương pháp tìm nguyên hàm, tính tích phân.

**Dạng 1 :** Tìm nguyên hàm, tính tích phân bằng định nghĩa.

**Dạng 2 :** Xác định nguyên hàm, tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

**Dạng 3 :** Xác định nguyên hàm, tính tích phân bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

#### B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+ Áp dụng ĐN, tính chất, bảng nguyên hàm để tìm nguyên hàm, tính tích phân .



- + Áp dụng phương pháp đổi biến số, phương pháp từng phần để tính tích phân
- + Sử dụng máy tính cầm tay để giải bài tập về nguyên hàm, tích phân

### C. BÀI TẬP

#### **Dạng 1: Áp dụng ĐN, tính chất, bảng nguyên hàm để tìm nguyên hàm, tính tích phân**

##### **Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số.**

- a.  $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} \Rightarrow f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$       ĐS.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C$
- b.  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$       ĐS.  $F(x) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C$
- c.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$       ĐS.  $F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$
- d.  $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} \Rightarrow f(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}$       ĐS.  $F(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln x + C$
- e.  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f(x) = (x-1).x^{-\frac{1}{3}}$       ĐS.  $F(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} + C$
- g.  $f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) = 1 - \cos x$       ĐS.  $F(x) = x - \sin x + C$
- h.  $f(x) = \tan^2 x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$       ĐS.  $F(x) = \tan x - x + C$
- i.  $f(x) = e^{2x} + 1$       ĐS.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x + C$

##### **Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :**

- a)  $\int (x^4 - 3x^2 + 2x + 1)dx = \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + x^2 + x + C$
- b)  $\int (x+1)(x-2)dx = \int (x^2 - x - 2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$
- c)  $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$
- d)  $\int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 2x + e^x \right) dx = \tan x - x^2 + e^x + C$
- e)  $\int (\cos 3x - 5 \sin x) dx = \int \cos 3x dx - 5 \int \sin x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + 5 \cos x + C$
- g)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$

##### **Bài 3. Tìm hàm số f(x) biết:**

- a)  $f'(x) = 2x + 1$  và  $f(1) = 5$

Ta có  $f(x) = \int (2x+1)dx = x^2 + x + C$ ; Vì  $f(1) = 5$  nên  $C = 3$ ; Vậy:  $f(x) = x^2 + x + 3$



b)  $f'(x) = 2 - x^2$  và  $f(2) = 7/3$ ; Ta có:  $f(x) = \int (2 - x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} + C$

Vì  $f(2) = 7/3$  nên  $C = 1$ ; Vậy:  $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$

#### Bài 4. Tính các tích phân sau

a)  $\int_0^1 (x^3 - 1) dx = \int_0^1 (x^3 - 1) dx = \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 1 dx = \left( \frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{-3}{4}$

b)  $\int_1^2 \frac{x^2 + 4x}{x} dx = \int_1^2 (x + 4) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^2 = (2 + 8) - \left( \frac{1}{2} + 4 \right) = \frac{11}{2}$

c)  $\int_0^1 (e^x + 2) dx = (e^x + 2x) \Big|_0^1 = e + 2 - 1 = e + 1$

#### Bài 5. Tính các tích phân sau:

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 3 \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 3 \sin x) dx = (\sin x + 3 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + \cos 2x) dx = \left( 3x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x - \sin 2x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin 4x + \sin 2x] dx = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \right]$   
 $= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right] = \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{4} \cos 2\pi - \frac{1}{2} \cos \pi \right) - \left( -\frac{1}{4} \cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 \right) \right]$   
 $= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

#### Bài 6. Tính các tích phân sau:

a)  $\int_0^2 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 -(x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 2$

b)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$



$$= (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - (\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2$$

## D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm nguyên hàm  $\int 4x^2 dx$ .

- A.  $\frac{3}{4}x^2 + C$       B.  $\frac{3}{4}x^3 + C$       C.  $\frac{4}{3}x^2 + C$       **D.  $\frac{4}{3}x^3 + C$ .**

**Câu 2.** Nguyên hàm  $\int 5(x^2 - 2x + 3)dx$  bằng

- A.  $5x^3 - 10x^2 + 15x$ .      B.  $5x^3 - 10x^2 + 15x + C$ .  
**C.  $\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 15x + C$**       D.  $\frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + 15x + C$ .

**Câu 3.** Nguyên hàm  $\int 5(3x^2 - 1)^2 dx$  bằng

- A.  $9x^5 - 10x^3 + 5x + C$**       B.  $9x^5 + 10x^3 - 5x + C$   
 C.  $15x^5 - 10x^3 + 5x + C$       D.  $15x^5 + 10x^3 - 5x + C$ .

**Câu 4.** Nguyên hàm  $\int (\cos x + \sin x)dx$  bằng

- A.  $\sin x + \cos x + C$       **B.  $\sin x - \cos x + C$**   
 C.  $-\sin x + \cos x + C$       D.  $-\sin x - \cos x + C$ .

**Câu 5.** Nguyên hàm  $\int (x^2 - 2x + \frac{4}{x})dx$  bằng

- A.  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4 \ln |x| + C$**       B.  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4 \ln x + C$   
 C.  $\frac{x^3}{3} - x^2 - 4 \ln |x| + C$       D.  $\frac{x^3}{3} - x^2 - 4 \ln x + C$ .

**Câu 5.** Nguyên hàm  $\int \frac{x^2 + 2x^3 + x^2 + 1}{x^2} dx$  bằng

- A.  $\frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{1}{x} + C$**       B.  $\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - \frac{3}{x} + C$   
 C.  $\frac{2x^3}{3} + x^2 + x - \frac{2}{x} + C$       D.  $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x - \frac{1}{x} + C$ .

**Câu 6.** Nguyên hàm  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^4}) dx$  bằng

- A.  $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{5}x^{\frac{9}{5}} + C$       B.  $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{9}{5}x^{\frac{9}{5}} + C$   
**C.  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C$**       D.  $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{5}{9}x^{\frac{5}{9}} + C$ .

**Câu 7.** Nguyên hàm  $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} dx$  bằng

- A.  $\frac{2x^3}{3} + 3x - \frac{2}{x} + C$       B.  $\frac{x^3}{3} - 3x + \frac{3}{x} + C$



C.  $\frac{2x^3}{3} + 2x - \frac{3}{x} + C$

D.  $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C.$

**Câu 8.** Nguyên hàm  $A = \int 2^x \cdot 3^{2x} dx$  bằng

A.  $\frac{12^x}{\ln 12} + C$

B.  $\frac{14^x}{\ln 14} + C$

C.  $\frac{16^x}{\ln 16} + C$

D.  $\frac{18^x}{\ln 18} + C.$

**Câu 9.** Nguyên hàm  $\int \cot^2 x dx$  bằng

A.  $\tan x + x + C$

B.  $-\tan x + x + C$

C.  $-\cot x - x + C$

D.  $\cot x + x + C.$

**Câu 10.** Nguyên hàm  $\int \tan^2 x dx$  bằng

A.  $\cot x - x + C$

B.  $\cot x + x + C$

C.  $\tan x - x + C$

D.  $\tan x + x + C$

**Câu 11.** Nguyên hàm  $\int 3 \sin^2 \frac{x}{2} dx$  bằng

A.  $\frac{3}{2}(x - \sin x) + C$

B.  $\frac{3}{2}x - \sin x + C$

C.  $\frac{3}{2}x \sin x + C$

D.  $\sin^3 \frac{x}{2} + C$

**Câu 12.** Giả sử  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$ . Giá trị của c là

A. 3

B. 4

C. 9

D. 16.

**Câu 13.** Tích phân  $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$  bằng

A.  $\frac{4}{3}$

B.  $\frac{5}{3}$

C.  $\frac{7}{3}$

D.  $\frac{8}{3}.$

**Câu 14.** Tích phân  $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$  bằng

A.  $\frac{14}{3}$

B.  $\frac{16}{3}$

C.  $\frac{17}{3}$

D.  $\frac{18}{3}.$

**Câu 15.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$  bằng

A.  $\frac{3}{8}$

B.  $\frac{5}{8}$

C.  $\frac{7}{8}$

D.  $\frac{9}{8}.$

**Câu 16.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$  bằng

A.  $\ln 2$

B.  $\ln 3$

C.  $1 - \ln 2$

D.  $1 - \ln 3.$

**Câu 17.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3} dx$  bằng

A.  $\ln 2 - \ln 3$

B.  $\ln 3 - \ln 2$

C.  $6\ln 3 - 3\ln 2$

D.  $3 + 6\ln 2 - 3\ln 3.$

**Câu 18.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$  bằng

A.  $\ln \frac{4}{3}$

B.  $\ln \frac{3}{5}$

C.  $\ln \frac{3}{4}$

D.  $\ln \frac{3}{5}.$

**Câu 19.** Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$  bằng

A. 0

B. 1

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\pi$

**Câu 20.** Tích phân  $\int_0^{\pi} \cos x dx$  bằng



A. 0

B. 1

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\pi$

**Câu 21:** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin 2x dx = (a + b)$ , Khi đó giá trị a+b là:

A.  $\frac{2}{5}$

B.  $\frac{3}{10}$

C.  $-\frac{2}{5}$

D.  $\frac{1}{5}$

**Câu 22.** Tính  $\int \cos^2 x dx$ .

A.  $\frac{1}{4} \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$

B.  $\frac{1}{4} (2x + \sin 2x) + C.$

C.  $\frac{1}{2} (x + \sin 2x) + C.$

D.  $\frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$

**Câu 23.** Tính  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ .

A.  $\ln |\ln x| + C.$

B.  $\frac{x^2}{2} (\ln x - 1) + C.$

C.  $\frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

D.  $\ln \frac{x^2}{2} + C.$

**Câu 24.** Giá trị m để hàm số  $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$  là:

A. m = 3.

B. m = 0.

C. m = 1.

D. m = 2.

**Câu 25.** Nếu  $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{a}{bx^3} + C$  thì  $b - a$  bằng:

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.



## DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

#### 1. Nguyên hàm

Tính  $I = \int f[u(x)] \cdot u'(x) dx$  bằng cách đặt  $t = u(x)$

$$\text{Đặt } t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$$

$$I = \int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = \int f(t) dt$$

#### 2. Tính tích phân $\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ bằng phương pháp đổi biến.

**Bước 1:** Đặt  $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) \cdot dx$

**Bước 2:** Đổi cận:  $x = a \Rightarrow t = \varphi(a)$ ;  $x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$

**Bước 3:** Viết tích phân đã cho theo biến mới, cận mới rồi tính tích phân tìm được.

### B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+ **Biết cách đặt ẩn phụ**

+ **Biết biểu diễn nguyên hàm theo ẩn phụ, đổi cận đối với tích phân.**

+ **Biết sử dụng tính chất, công thức vào giải toán.**

### C. BÀI TẬP

#### 1. NGUYÊN HÀM

**Bài 1.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a)  $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx$       Đặt  $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C$$

b)  $\int (x^3 + 5)^4 \cdot x^2 dx$       Đặt  $u = x^3 + 5 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$

$$\Rightarrow \int (x^3 + 5)^4 \cdot x^2 dx = \int \frac{1}{3} u^4 du = \frac{1}{3} \int u^4 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{15} + C = \frac{(x^3 + 5)^5}{15} + C$$

c)  $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$       Đặt  $u = x^2 + 5 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2 + 5} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + C$$

d)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$       Đặt  $u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{2x-1} + C$$

e)  $\int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx$ ;      Đặt  $u = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow du = 2(x-1)dx \Rightarrow (x-1)dx = \frac{du}{2}$



$$\Rightarrow \int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx = \int \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2-2x+3} + C$$

**Bài 4. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:**

a)  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$  Đặt  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx = -\int \frac{du}{u^5} = -\int u^{-5} du = \frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4u^4} + C = \frac{1}{4\cos^4 x} + C$$

b)  $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$  Đặt  $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\Rightarrow \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

c)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^{\frac{2}{3}} x} dx = \int \sin x \cos^{-\frac{2}{3}} x dx$  Đặt  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = -\int u^{-\frac{2}{3}} du = -3u^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$$

d)  $\int (1 + \cot^2 2x) e^{\cot 2x} dx$  Đặt  $u = \cot 2x \Rightarrow du = -\frac{2}{\sin^2 2x} dx \Rightarrow du = -2(1 + \cot^2 2x) dx$

$$\Rightarrow \int (1 + \cot^2 2x) e^{\cot 2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^{\cot 2x} + C$$

## 2. TÍCH PHÂN

**Bài 1. Tính các tích phân sau :**

a)  $A = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$

Đặt  $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$  ; Đổi cận: Khi  $x = 0 \Rightarrow t = 1$ ; Khi  $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$\Rightarrow A = \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

b)  $B = \int_0^1 x^3 (x^4 - 1)^5 dx$

Đặt  $t = x^4 - 1 \Rightarrow dt = 4x^3 dx$  ; Đổi cận: Khi  $x = 0 \Rightarrow t = -1$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow B = \int_{-1}^0 \frac{1}{4} t^5 dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{24} t^6 \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{24}$$

c)  $C = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$  ;

Đặt  $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$  Đổi cận: Khi  $x = 1 \Rightarrow t = e - 1$ ; Khi  $x = 2 \Rightarrow t = e^2 - 1$

$$\Rightarrow C = \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{e-1}^{e^2-1} = \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = \ln \frac{e^2 - 1}{e - 1} = \ln(e + 1)$$





$$d) D = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} x dx \quad \text{Đặt } t = 4-x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{dt}{2}$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow t = 4; \quad x = 2 \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow D = \int_4^0 -\frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{3} (t\sqrt{t}) \Big|_0^4 = \frac{1}{3} (4 \cdot 2 - 0) = \frac{8}{3}$$

$$e) E = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

$$\text{Khi } x = 1 \Rightarrow t = 1; \quad x = 4 \Rightarrow t = 2; \quad \Rightarrow E = \int_1^2 2 \cdot e^t dt = 2e^t \Big|_1^2 = 2(e^2 - e)$$

$$f) F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \text{Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow \sin^2 0 = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow F = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$g) G = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^2 \cdot e^x dx \quad (\text{Đề thi TN năm 2011-2012})$$

$$\text{Đặt } t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx; \quad \text{Đổi cận: Khi } x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = \ln 2 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow G = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

#### D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Nguyên hàm  $\int (5x+3)^5 dx$  bằng

- A.  $\frac{x^6}{30} + C$       B.  $\frac{x^5}{25} + C$       C.  $\frac{x^4}{24} + C$       D.  $\frac{x^3}{20} + C$ .

**Câu 2.** Nguyên hàm  $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$  bằng

- A.  $\frac{\cos^5 x}{5} + C$       B.  $\frac{\sin^5 x}{5} + C$       C.  $\cos^5 x + C$       D.  $\sin^5 x + C$ .

**Câu 3.** Nguyên hàm  $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$  bằng

- A.  $\ln e^x + C$       B.  $\frac{\ln x}{\ln e^x} + C$       C.  $\ln(e^x - 1)$       D.  $\ln(e^x + 1)$ .

**Câu 4.** Nguyên hàm  $\int \frac{x^3}{(6x^4 + 5)^5} dx$  bằng



A.  $\frac{-6}{85(6x^4+5)^4} + C$

B.  $\frac{-2}{55(6x^4+5)^4} + C$

C.  $\frac{-1}{96(6x^4+5)^4} + C$

D.  $\frac{1}{75(6x^4+5)^4} + C.$

**Câu 5.** Nguyên hàm  $\int \sqrt{2\cos x - 1} \cdot \sin x dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C$

B.  $-\frac{1}{3}\sqrt{(3\cos x - 2)^3} + C$

C.  $\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C$

D.  $\frac{1}{3}\sqrt{(3\cos x - 2)^3} + C.$

**Câu 6.** Nguyên hàm  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{\cos x} + C$

B.  $-\frac{1}{\sin x} + C$

C.  $\frac{1}{\sin x} + C$

D.  $\frac{1}{\cos x} + C.$

**Câu 7.** Nguyên hàm  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{\cos x} + C$

B.  $-\frac{1}{\sin x} + C$

C.  $\frac{1}{\sin x} + C$

D.  $\frac{1}{\cos x} + C.$

**Câu 8.** Nguyên hàm  $\int (\tan x + \tan^3 x) dx$  bằng

A.  $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$

B.  $\tan^2 x + C$

C.  $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

D.  $\tan^3 x + C.$

**Câu 9.** Nguyên hàm  $\int [x(3-x^4)]^3 dx$  bằng

A.  $\frac{3-x^4}{16} + C$

B.  $\frac{x^4-3}{16} + C$

C.  $-\frac{(3-x^4)^4}{16} + C$

D.  $\frac{(3-x^4)^4}{16} + C.$

**Câu 10.** Nguyên hàm  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$  bằng

A.  $-e^{\sqrt{x}} + C$

B.  $e^{\sqrt{x}} + C$

C.  $2e^{\sqrt{x}} + C$

D.  $3e^{\sqrt{x}} + C.$

**Câu 11.** Nguyên hàm  $\int \frac{1}{x} \ln x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$

B.  $\frac{1}{2}\ln x^2 + C$

C.  $\frac{1}{2}\ln^2 x^2 + C$

D.  $\ln x^2 + C.$

**Câu 12.** Tích phân  $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$  bằng

A.  $\frac{43}{7}$

B.  $\frac{47}{8}$

C.  $\frac{52}{9}$

D.  $\frac{57}{10}.$

**Câu 13.** Tính tích phân  $\int_{-1}^0 x^3 \sqrt{x+1} dx.$



**A.**  $-\frac{9}{28}$

**B.**  $-\frac{7}{15}$

**C.**  $\frac{5}{12}$

**D.**  $\frac{9}{17}$ .

**Câu 14.** Tính tích phân  $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2} dx$ .

**A.**  $\frac{5\sqrt{5}-4\sqrt{3}}{5}$

**B.**  $\frac{25\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{5}$

**C.**  $\frac{25\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{5}$

**D.**  $\frac{5\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{5}$ .

**Câu 15.** Tính tích phân  $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+4} dx$ .

**A.**  $-\frac{5\sqrt{5}}{3}$

**B.**  $\frac{64}{15}$

**C.**  $-\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{64}{15}$

**D.**  $-\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{64}{15}$ .

**Câu 16.** Tính tích phân  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**A.**  $-\frac{21}{25}$

**B.**  $-\frac{21}{23}$

**C.**  $-\frac{19}{24}$

**D.**  $-\frac{19}{22}$ .

**Câu 17.** Tính tích phân  $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$ .

**A.**  $-\sqrt{3}-2\ln(2+\sqrt{3})$

**B.**  $\sqrt{3}-2\ln(2+\sqrt{3})$

**C.**  $\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})$

**D.**  $-\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})$

**Câu 18.** Tính tích phân  $\int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ .

**A.**  $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$

**B.**  $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}$

**C.**  $4\ln\frac{3}{5}$

**D.**  $4\ln\frac{5}{3}$

**Câu 19.** Tính tích phân  $\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ .

**A.** 0

**B.**  $\frac{15}{19}$

**C.**  $\frac{21}{28}$

**D.**  $2\pi$

**Câu 20.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$  bằng

**A.**  $\ln\left(\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$

**B.**  $\ln\left(\frac{e-\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$

**C.**  $\ln\left(\frac{e+\sqrt{e+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$

**D.**  $\ln\left(\frac{e-\sqrt{e+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$

**Câu 21.** Cho  $\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  và  $u = x^2 - 1$ . Chọn khẳng định **sai**?

**A.**  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

**B.**  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$

**C.**  $I = \frac{2}{3}\sqrt{27}$

**D.**  $I = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$



**Câu 22:** Biết  $\int_0^a \sin x \cos x dx = \frac{1}{4}$ . Tìm giá trị của a.

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{2\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{3}$

**Câu 23.** Biết  $\int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ . Tìm giá trị  $S = a + b$ .

- A.  $S = -2$ .      B.  $S = 0$ .      C.  $S = 2$ .      D.  $S = 1$ .

**Câu 24.** Cho  $\int_1^{2017} f(x) dx = 2$ ,  $\int_1^{2017} g(x) dx = -5$ . Tìm  $J = \int_1^{2017} [2f(x) + g(x)] dx$ .

- A.  $J = -1$ .      B.  $J = 1$ .      C.  $J = 0$ .      D.  $J = 2$ .

**Câu 25.** Giả sử  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khi đó  $a - b$  bằng:

- A. 5.      B.  $-1$ .      C.  $-5$ .      D. 1.



## DẠNG 3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Nguyên hàm

Nếu  $u(x)$ ,  $v(x)$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên  $I$

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

$$\text{Hay } \int u dv = uv - \int v du \quad (\text{với } du = u'(x)dx, \quad dv = v'(x)dx)$$

#### 2. Tính tích phân từng phần :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

### B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

#### + Phân dạng

**Dạng 1:**  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$  Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$

**Dạng 2:**  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln(ax) dx$  Đặt  $\begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int f(x) dx \end{cases}$

**Dạng 3:**  $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \cdot \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$  đặt:  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin ax dx \end{cases}$

### C. BÀI TẬP

#### 1. NGUYÊN HÀM

**Bài 1:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a)  $\int x. \sin x dx$  Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x. \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

b)  $\int (x-1)e^x dx$  Đặt  $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int (x-1)e^x dx = (x-1).e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C = e^x(x-2) + C$$

c)  $\int x \ln x dx$  Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$



$$\Rightarrow \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$d) \int (1-x) \cos x dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = 1-x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int (1-x) \cos x dx = (1-x) \sin x + \int \sin x dx = (1-x) \sin x - \cos x + C$$

**Bài 2.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$a) \int (1-2x) e^x dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = 1-2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int (1-2x) e^x dx = (1-2x) e^x + \int 2e^x dx = (1-2x) e^x + 2e^x + C = e^x (3-2x) + C$$

$$b) \int \sqrt{x} \ln x dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$c) \int \frac{x dx}{\sin^2 x} \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$d) \int (2x+3) e^{-x} dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int (2x+3) e^{-x} dx &= -e^{-x} (2x+3) - \int -e^{-x} \cdot 2 dx = -e^{-x} (2x+3) + \int 2e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} (2x+3) - 2e^{-x} + C = -e^{-x} (2x+1) + C \end{aligned}$$

## 2. TÍCH PHÂN

**Bài 1.** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \cdot dx \quad \text{Đặt : } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$



$$b) J = \int_1^e x \ln x \, dx \quad \text{Đặt : } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } J = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$c) \int_0^1 x \cdot e^x \, dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_0^1 x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

## Bài 2. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \, dx}{\cos^2 x} \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \, dx}{\cos^2 x} &= (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} + (\ln |\cos x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \left( \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 \right) = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$b) B = \int_0^1 x \cdot e^{2x} \, dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \cdot e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1 + e^2}{4}$$

$$c) C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

$$* \text{ Tính : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Thế  $I = 1$  vào  $C$  ta được :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

#### D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm nguyên hàm  $\int x \ln x dx$ .

A.  $\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

B.  $x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

C.  $\frac{1}{3} x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C$

D.  $x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C$ .

**Câu 2.** Nguyên hàm  $\int x.2^x dx$  bằng

A.  $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} . 2^x + C$

B.  $\frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} . 2^x + C$

C.  $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 2} . 2^x + C$

D.  $\frac{x.2^x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 2} . 2^x + C$ .

**Câu 3.** Nguyên hàm  $\int \sqrt{x} . \ln x dx$  bằng

A.  $\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + C$

B.  $\frac{2}{3} x \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + C$

C.  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + C$

D.  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x + \frac{4}{9} x \sqrt{x} + C$ .

**Câu 4.** Nguyên hàm  $\int x \ln(x+2) dx$  bằng

A.  $x^2 \ln(x+2) - \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln(x+2) + C$

B.  $\frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+2) \right] + C$

C.  $\frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln(x+2) \right] + C$

D.  $\ln(x+2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2) \right] + C$

**Câu 5.** Nguyên hàm  $\int x.e^{x^2+1} dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

B.  $e^{x^2+1} + C$

C.  $2e^{x^2+1} + C$

D.  $x^2 . e^{x^2+1} + C$

**Câu 6.** Nguyên hàm  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$  bằng:

A.  $\frac{3}{2} \sqrt{(\ln x)^3} + C$

B.  $2\sqrt{(\ln x)^3} + C$

C.  $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + C$

D.  $3\sqrt{(\ln x)^3} + C$

**Câu 7.** Nguyên hàm  $\int \frac{1}{x \ln^5 x} dx$  bằng:





A.  $-\frac{\ln^4 x}{4} + C$

B.  $-\frac{4}{\ln^4 x} + C$

C.  $\frac{1}{4\ln^4 x} + C$

D.  $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C$

Câu 8. Nguyên hàm  $\int x \cos x dx$  bằng:

A.  $\frac{x^2}{2} \sin x + C$

B.  $x \sin x + \cos x + C$

C.  $x \sin x - \sin x + C$

D.  $\frac{x^2}{2} \cos x + C$

Câu 9. Nguyên hàm  $\int x e^{\frac{x}{3}} dx$  bằng:

A.  $3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$

B.  $(x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

C.  $\frac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$

D.  $\frac{1}{3}(x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

Câu 10. Tìm nguyên hàm  $\int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx$ .

A.  $\left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{x^2-2x+3} + C$

B.  $(x-1)e^{\frac{1}{3}x^3-x^2+3x} + C$

C.  $\frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$

D.  $\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3} + C$

Câu 11. Tích phân  $\int_0^1 x e^x dx$  bằng:

A.  $e$

B.  $e-1$

C.  $1$

D.  $\frac{1}{2}e-1$

Câu 12. Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$  bằng:

A.  $\frac{\pi-2}{8}$

B.  $\frac{\pi-1}{4}$

C.  $3-\frac{\pi}{2}$

D.  $2-\frac{\pi}{2}$

Câu 13. Tích phân  $\int_0^3 (x+1) \ln(x+1) dx$  bằng:

A.  $6 \ln 2 - \frac{3}{2}$

B.  $10 \ln 2 + \frac{16}{5}$

C.  $8 \ln 2 + \frac{7}{2}$

D.  $16 \ln 2 - \frac{15}{4}$

Câu 14. Tích phân  $\int_0^1 x \ln(x^2+1) dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{2} \ln 2 - 1$

B.  $\ln 2 - 1$

C.  $\ln 2 - \frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$

Câu 15. Tính tích phân  $\int_1^e x^2 \ln x dx$ .

A.  $\frac{e^2+1}{4}$

B.  $\frac{2e^3+1}{9}$

C.  $\frac{3e^3+2}{8}$

D.  $\frac{2e^2+3}{3}$

Câu 16. Tìm tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos x dx$ .

A.  $\pi-3$

B.  $\pi+3$

C.  $2\pi-3$

D.  $2\pi+3$



**Câu 17.** Tính tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin 2x dx$ .

- A.  $\frac{\pi}{4} - 1$       **B.**  $\frac{\pi}{4} + 1$       C.  $\frac{\pi}{4} + 2$       D.  $\frac{\pi}{4} - 2$ .

**Câu 18.** Tính tích phân  $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \sin 3x dx$ .

- A.  $\frac{9}{5}$       **B.**  $-\frac{9}{5}$       C.  $\frac{5}{9}$       **D.**  $-\frac{5}{9}$ .

**Câu 19.** Tính tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$ .

- A.**  $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$       **B.**  $\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$       C.  $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2}$       D.  $\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}$ .

**Câu 20.** Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ .

- A.  $\pi - 1$       **B.**  $\pi - 2$       C.  $\pi - 3$       D.  $\pi - 4$

**Câu 21.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 x e^x dx$ .

- A.**  $I = 1$ .      B.  $I = 2$ .      C.  $I = 3$ .      D.  $I = 4$ .

**Câu 22.** Giả sử  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khi đó  $a - b$  bằng:

- A.** 5.      B. -1.      C. -5.      D. 1.

**Câu 23.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$ .

- A. 1.      **B.**  $1 - \frac{2}{e}$ .      C.  $\frac{2}{e}$ .      D.  $2e - 1$ .

**Câu 24.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$ .

- A.  $I = \frac{2 \ln 2 + 6}{9}$ .      **B.**  $I = \frac{6 \ln 2 + 2}{9}$ .      C.  $I = \frac{2 \ln 2 - 6}{9}$ .      D.  $I = \frac{6 \ln 2 - 2}{9}$ .

**Câu 25.** Tích phân  $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = a.e^{\pi} + b$ . Khi đó tổng  $S = a + b$  bằng:

- A.  $S = -\frac{1}{2}$ .      **B.**  $S = -1$ .      C.  $S = \frac{1}{2}$ .      D.  $S = 1$ .



## CHỦ ĐỀ 2. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Diện tích hình phẳng

+ Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $f(x)$  liên tục, trục hoành, và hai đường

thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  được tính theo công thức  $S = \int_a^b |f(x)| dx$  (1)

+ Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và các

đường thẳng  $x = a$ ;  $x = b$  là:  $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$  (2)

+ Chú ý:  $\int_a^c |f_1(x) - f_2(x)| dx = \left| \int_a^c [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|$

#### 2. Thể tích vật thể

Cho vật thể (T) giới hạn bởi 2 mp song song  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ . Xét hệ tọa độ Oxy sao cho Ox vuông góc với  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ . Gọi giao điểm của  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  với Ox là  $a$ ,  $b$  ( $a < b$ ). Một mp( $\gamma$ ) vuông góc với Ox tại  $x$  và cắt (T) theo một thiết diện có diện tích  $S(x)$ .

Giả sử  $S(x)$  là hàm liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó thể tích của (T) là:  $V = \int_a^b S(x) dx$  (3)

#### 3. Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục Ox

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (4)$$

### B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong, hai đường cong, ba đường cong;

+ Tính thể tích vật thể tròn xoay;

+ Giải một số bài toán thực tế.

### C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số  $y = x^3$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -2$ ,  $x = 2$

Ta có trên  $[-2; 0]$ ,  $x^3 \leq 0$ . Trên  $[0; 2]$ ,  $x^3 \geq 0$

$$S = \int_{-2}^2 |x^3| dx = \int_{-2}^0 (-x^3) dx + \int_0^2 x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot (-16) + \frac{1}{4} \cdot 16 = 8 \quad (\text{ĐVDT})$$

b) Đồ thị hàm số  $y = x + x^{-1}$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 1$  và  $x = 2$

$$\text{Ta có: } S = \int_1^2 \left( x + \frac{1}{x} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \ln x \right) \Big|_1^2 = 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

c) Đồ thị hàm số  $y = e^x + 1$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 0$  và đường thẳng  $x = 1$



Ta có:  $S = \int_0^1 (e^x + 1) dx = (e^x + x) \Big|_0^1 = e + 1 - 1 = e$

d) Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 4x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 2$  và đường thẳng  $x = 4$

Ta có:  $S = \int_2^4 (x^3 - 4x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_2^4 = 36$  (ĐVDT)

**Bài 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi.

a) Đồ thị hàm số  $y = x^3 - x$ ;  $y = x - x^2$ . Đặt  $f_1(x) = x^3 - x$ ,  $f_2(x) = x - x^2$

Ta có  $f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$  có 3 nghiệm  $x = -2$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$

Vậy: Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{37}{12}$$

b) Đồ thị hàm số  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ , đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ ;  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Đặt  $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = \sin x$ ;

Ta có  $f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx \\ &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx \right| = \left| -(\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| + \left| (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| = \\ &= \left| -\left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 \right| + \left| (-1) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = |\sqrt{2} + 1| + |-1 + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

c) Đồ thị hàm số (H):  $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ y = 1 - x \\ x = 0, x = 2 \end{cases}$

$$S(H) = \int_0^2 |(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (1 - x)| dx = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 4x - 2| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) dx + \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) dx \\ &= \left( -\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 2x \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 \end{aligned}$$



$$= \left( -\frac{1}{4} + 1 - 2 + 2 \right) + \left[ (4 - 8 + 8 - 4) - \left( \frac{1}{4} - 1 + 2 - 2 \right) \right] = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

**Bài 3.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Trục tung, trục hoành và đồ thị hàm số :  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  (Đề thi TN năm 2004-2005)

Đồ thị giao với trục hoành tại điểm  $\left( -\frac{1}{2}; 0 \right)$  trục tung :  $x = 0$ .

$$\text{Diện tích hình cần tìm là } S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( \frac{2x+2-2+1}{x+1} \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left| \left( 2x - \ln|x+1| \right) \right|_{-\frac{1}{2}}^0 = - \left( -1 - \ln \frac{1}{2} \right) = 1 + \ln 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2 \quad (\text{ĐVDT})$$

b) Đồ thị các hàm số :  $y = e^x$ ;  $y = 2$  và đường thẳng  $x=1$  (Đề thi TN năm 2005-2006)

Giải PT :  $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$  ; Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$\begin{aligned} S &= \int_{\ln 2}^1 |e^x - 2| dx = \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1 = (e - 2) - (e^{\ln 2} - 2 \ln 2) \\ &= (e - 2) - (2 - 2 \ln 2) = e + 2 \ln 2 - 4 \quad (\text{ĐVDT}) \end{aligned}$$

**Bài 4.** Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh Ox

a) Đồ thị hàm số  $y = \sin x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4} \quad (\text{ĐVTT})$$

b) Đồ thị hàm số  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{ĐVTT})$$

c) Đồ thị hàm số  $y = x.e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \quad \text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$V = \frac{\pi}{2} x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \pi \int_0^1 x e^x dx = \frac{\pi}{2} e^2 - \pi \int_0^1 x e^x dx$$

$$\text{Tính } I = \int_0^1 x e^x dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$



$$\Rightarrow I = \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

Thay I vào V ta có :  $V = \frac{\pi}{2} \cdot e^2 - \pi \int_0^1 x \cdot e^{2x} dx = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$  (ĐVTT)

d) Đồ thị hàm số :  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  và các đường  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

$$V = \pi \int_0^3 \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left( \frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx = \pi \left( \frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{35} \text{ (ĐVTT)}$$

## D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Cho hình (H) giới hạn bởi  $y = \sin x$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pi$  và  $y = 0$ . Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox.

- A.  $V = \pi/2$       B.  $V = \pi^2/2$       C.  $V = 2\pi$       D.  $V = \pi^2/4$

**Câu 2.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x^2$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$  và  $y = 0$ .

- A.  $\frac{4}{3}$       B.  $\frac{8}{3}$       C.  $\frac{7}{3}$       D. 1

**Câu 3.** Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  liên tục và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) được tính theo công thức:

- A.  $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$  .      B.  $S = \left| \int_a^b f_1(x) - f_2(x) dx \right|$  .  
C.  $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$  .      D.  $S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$  .

**Câu 4.** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$  và  $y = x$ . Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox.

- A.  $\pi/6$       B.  $\pi/3$       C.  $\pi/2$       D.  $\pi$

**Câu 5.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 1$  và đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3$ .

- A. 6      B. 4      C. 2      D. 8

**Câu 6.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = -x^3 + 3x + 1$  và đường thẳng  $y = 3$ .

- A. 57/4.      B. 27/4.      C. 45/4      D. 21/4.

**Câu 7.** Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi ba đồ thị hàm số  $y = x \ln x$ ,  $x = e$ , trục hoành. Tính thể tích  $V$  khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

- A.  $V = \frac{5e^3 - 2}{27} \pi$       B.  $V = \frac{5e^3 - 2}{27}$   
C.  $V = \frac{5e^3 + 2}{27} \pi$       D.  $V = \frac{5e^3 - 2}{27} \pi^2$

**Câu 8.** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C):  $y = x^2 + 2x$ ;  $y - x - 2 = 0$  .

- A.  $\frac{5}{2}$       B.  $\frac{7}{2}$       C.  $\frac{9}{2}$       D.  $\frac{11}{2}$



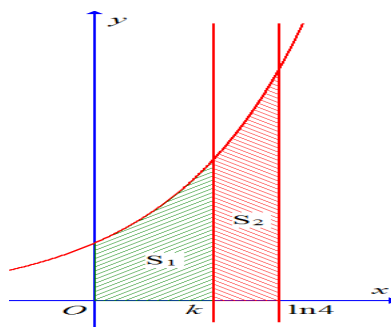
**Câu 9:** Cho hình thang cong  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = \ln 4$ . Đường thẳng  $x = k$  ( $0 < k < \ln 4$ ) chia  $(H)$  thành hai phần có diện tích là  $S_1$ ,  $S_2$  và như hình vẽ bên. Tìm  $x = k$  để  $S_1 = 2S_2$ .

A.  $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B.  $k = \ln 2$

C.  $k = \ln \frac{8}{3}$

D.  $k = \ln 3$



**Câu 10.** Với giá trị nào của  $m > 0$  thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = mx$  bằng  $\frac{4}{3}$  đvdt?

A.  $m = 2$

B.  $m = 1$

C.  $m = 3$

D.  $m = 4$

**Câu 11.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x \ln^2 x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = e$ .

A.  $S = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$ .

B.  $S = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$ .

C.  $S = \frac{1}{4}(1 - e^2)$ .

D.  $S = (1 - e^2)$ .

**Câu 12.** Tìm diện tích  $S$  của hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ , hai trục tọa độ và đường thẳng  $x = 2$ .

A.  $S = \frac{19}{2}$  (đvdt)

B.  $S = \frac{5}{2}$  (đvdt)

C.  $S = \frac{1}{3}$  (đvdt)

D.  $S = \frac{9}{2}$  (đvdt)

**Câu 13.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  và đường thẳng  $x - y + 1 = 0$ .

A. 8 (đvdt).

B. 4 (đvdt).

C. 6 (đvdt).

D. 0 (đvdt).

**Câu 14.** Thể tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = (x - 2)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  khi xoay quanh trục hoành là.

A.  $V = \frac{32}{5}$

B.  $V = 32\pi$

C.  $V = \frac{32}{5}\pi$

D. 32

**Câu 15.** Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi  $y = x^2$ ;  $y = x + 2$  quanh trục  $Ox$  là

A.  $\frac{72\pi}{5}$  (đvtt).

B.  $\frac{81\pi}{10}$  (đvtt).

C.  $\frac{81\pi}{5}$  (đvtt).

D.  $\frac{72\pi}{10}$  (đvtt).

**Câu 16.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ . Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  ta được  $V = \pi \left( \frac{a}{b} + 1 \right)$ . Khi đó

A.  $ab = 15$

B.  $ab = 20$

C.  $ab = 28$

D.  $ab = 54$

**Câu 17.** Diện tích hình giới hạn bởi  $y = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = -1$  bằng  $a \ln \frac{2}{3} + b$ . Khi đó,  $a + 2b$  là:

A. 2

B. 40

C.  $\frac{61}{2}$

D. -2

**Câu 18.** Nếu  $f(1) = 12$ ,  $f'(x)$  liên tục và  $\int_1^4 f'(x) dx = 17$ . Giá trị của  $f(4)$  bằng

A. 29

B. 5

C. 15

D. 19

**Câu 19.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Diện tích hình phẳng (phần gạch trong hình) là

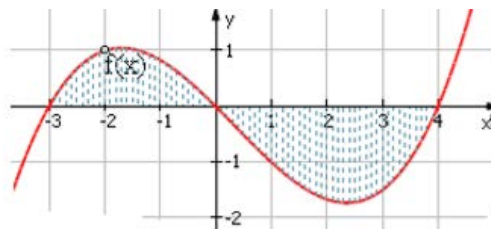


**A.**  $\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_4^0 f(x)dx$

**B.**  $\int_{-3}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$

**C.**  $\int_0^{-3} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$

**D.**  $\int_{-3}^4 f(x)dx$



**Câu 20.** Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = 2x - x^2$ ,  $y = x$ . Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình này quanh trục trục  $Ox$ :

**A.**  $\frac{\pi}{25}$

**B.**  $\frac{\pi}{6}$

**C.**  $\frac{\pi}{5}$

**D.**  $\frac{6\pi}{5}$

**Câu 21.** Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ . Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình này quanh trục trục  $Ox$ :

**A.**  $\frac{8\pi}{3}$

**B.**  $\frac{2\pi}{5}$

**C.**  $\frac{\pi}{2}$

**D.**  $\frac{3\pi}{10}$

**Câu 22.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = (e+1)x$  và  $y = (1+e^x)x$  là:

**A.**  $2 - \frac{e}{2}$

**B.** 2

**C.**  $\frac{e}{2} - 1$

**D.**  $\frac{3}{e} - 1$

**Câu 23.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = -2x^2 + x + 3$  và trục hoành là:

**A.**  $\frac{125}{24}$

**B.**  $\frac{125}{34}$

**C.**  $\frac{125}{14}$

**D.**  $\frac{125}{44}$

**Câu 24.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = 2 - x^2$ ,  $y = \sqrt{1-x^2}$  và trục hoành là:

**A.**  $3\sqrt{2} - 2\pi$

**B.**  $2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$

**C.**  $\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2}$

**D.**  $4\sqrt{2} - \pi$

**Câu 25.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = mx \cos x$ ;  $Ox$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pi$  bằng  $3\pi$ . Khi đó:

**A.**  $m = -3$

**B.**  $m = 3$

**C.**  $m = -4$

**D.**  $m = \pm 3$





## KIỂM TRA 45 PHÚT

### I. MA TRẬN ĐỀ

Chủ đề hoặc mạch kiến thức kĩ năng	Mức độ nhận thức				Tổng
	Nhận biết 1	Thông hiểu 2	Vận dụng thấp 3	Vận dụng cao 4	
Tích phân	Câu 1,2,3,4 1,6	Câu 9,10,11, 12, 13, 14 2,4	Câu 19,20,21 1,2	Câu 22 0,4	14 5,6
Ứng dụng hình học của tích phân	Câu 5,6,7,8 1,2	Câu 15,16,17,18 1,2	Câu 23 0,4	Câu 24,25 0,8	11 4,4
Tổng	8 3,2	10 4,0	4 1,6	3 1,2	25 10

### II. ĐỀ KIỂM TRA

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $[a; b]$ . Khi đó tích phân  $\int_a^b f(x)dx$  là:

- A.  $F(a) - F(b)$ .      B.  $F(a) + F(b)$ .      C.  $F(b) - F(a)$ .      D.  $-F(a) - F(b)$ .

**Câu 2.** Nếu  $\int_a^d f(x)dx = 5$ ,  $\int_d^b f(x)dx = 2$  với  $a < d < b$  thì  $\int_a^b f(x)dx$  bằng:

- A. -3      B. 7      C. 3      D. -7

**Câu 3.** Cho  $\int_2^6 f(x)dx = 4$ ,  $\int_2^6 g(x)dx = 2$ . Tính  $\int_2^6 (f(x) + g(x))dx$ ?

- A. 1      B. 7      C. 6      D. 2

**Câu 4.** Nếu  $\int_1^3 f(x)dx = 5$ ,  $\int_2^3 f(x)dx = 3$  thì  $\int_1^2 f(x)dx$  bằng:

- A. -2      B. 2      C. 1      D. 5

**Câu 5.** Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^2$ , trục  $Ox$ , hai đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

- A.  $S = -\int_0^3 x^2 dx$ .      B.  $S = \int_0^3 x^2 dx$ .      C.  $S = \int x^2 dx$ .      D.  $S = \pi \int_0^3 x^4 dx$ .

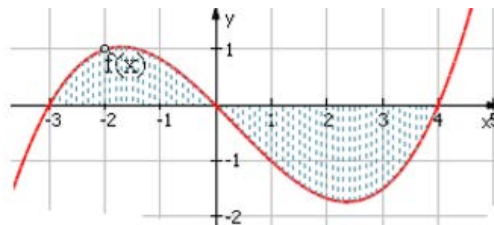


**Câu 6.** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y=f_1(x)$ ,  $y=f_2(x)$  liên tục trên  $[a;b]$  và các đường thẳng  $x=a$ ;  $x=b$  là:

- A.  $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$ .    B.  $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx$ .    C.  $\int_b^a |f_1(x) - f_2(x)| dx$ .    D.  $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ .

**Câu 7.** Cho đồ thị hàm số  $y=f(x)$ . Diện tích hình phẳng (phần gạch trong hình)

- A.  $\int_{-3}^0 f(x) dx + \int_4^0 f(x) dx$ .    B.  $\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$ .  
C.  $\int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$ .    D.  $\int_{-3}^4 f(x) dx$ .



**Câu 8.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y=\sin x$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=\pi$  quay quanh trục  $Ox$  là:

- A.  $\pi \int_0^\pi \sin x dx$ .    B.  $\int_0^\pi \sin x dx$ .    C.  $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ .    D.  $\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$ .

**Câu 9.** Đẳng thức nào đúng?

- A.  $\int_0^3 |x-2| dx = \int_{-2}^1 |x-1| dx$ .    B.  $\int_0^3 |x-2| dx = \int_0^3 (x-2) dx$ .  
C.  $\int_0^3 |x-2| dx = \int_2^3 (x-2) dx - \int_0^2 (x-2) dx$ .    D.  $\int_0^3 |x-2| dx = \int_2^3 (x-2) dx + \int_0^2 (x-2) dx$ .

**Câu 10.** Tìm tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ .

- A. 2    B.  $1 - \frac{\pi}{4}$     C.  $\ln 2$     D.  $\frac{\pi}{3}$

**Câu 11.** Cho  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  và  $u = x^2 - 1$ . Chọn khẳng định sai ?

- A.  $I = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$ .    B.  $I = \frac{2}{3} \sqrt{27}$ .    C.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ .    D.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$ .

**Câu 12.** Cho  $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx$ . Đặt  $t = \sqrt[3]{1-x^4}$  thì  $I$  bằng:

- A.  $-\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$ .    B.  $\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$ .    C.  $\int_0^1 t^3 dt$ .    D.  $-\int_0^1 t^3 dt$ .

**Câu 13.** Tìm tích phân  $I = \int_1^2 (2x-1)e^x dx$ .

- A.  $e^2 + e$ .    B.  $e^2 - e$ .    C.  $2e - 3$ .    D.  $2e^2 - 3e$ .



**Câu 14.** Đổi biến  $u = \sin x$  thì  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$  thành:

- A.  $\int_0^1 u^4 \sqrt{1-u^2} du.$       B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4 du.$       C.  $\int_0^1 u^4 du.$       D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3 \sqrt{1-u^2} du.$

**Câu 15.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x^2 + 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  và trục Ox là:

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

**Câu 16.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $y = \frac{-1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  là

- A.  $\frac{5}{6}$       B.  $\frac{1}{12}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{-5}{6}$ .

**Câu 17.** Gọi S là miền giới hạn bởi (C):  $y = x^2$ , trục Ox và hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Thể tích vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục Ox là:

- A.  $\frac{31\pi}{5} + 1.$       B.  $\frac{31\pi}{5} + \frac{1}{3}.$       C.  $\frac{31\pi}{5}.$       D.  $\frac{31\pi}{5} - \frac{1}{3}.$

**Câu 18.** Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  quanh trục Ox có giá trị bằng:

- A.  $\frac{8\pi}{15}$       B.  $\frac{7\pi}{8}$       C.  $\frac{15\pi}{8}$       D.  $\frac{8\pi}{7}$

**Câu 19.** Tìm m biết  $\int_0^m (2x+5)dx = 6.$

- A.  $m = -1$ ,  $m = -6.$       B.  $m = 1$ ,  $m = -6.$       C.  $m = 1$ ,  $m = 6.$       D.  $m = -1$ ,  $m = 6.$

**Câu 20.** Đổi biến  $x = 2\sin t$  thì  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  trở thành:

- A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt.$       B.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt.$       C.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt.$       D.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt.$

**Câu 21.** Biết  $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$ . Tính tích  $ab$ .

- A. -1      B. 1      C. -15      D. 5

**Câu 22.** Tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^n \sin x dx$  bằng:

- A.  $\frac{1}{1+n}.$       B.  $\frac{1}{n-1}.$       C.  $\frac{1}{2n}.$       D.  $\frac{1}{n}$

**Câu 23.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = 2x$  là:

- A.  $\frac{4}{3}$       B.  $\frac{3}{2}$       C.  $\frac{5}{3}$       D.  $\frac{23}{15}$

**Câu 24.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = 4 - |x|$  và Parabol  $y = \frac{x^2}{2}$  là:



A.  $\frac{22}{3}$ .

B.  $\frac{26}{3}$ .

C.  $\frac{25}{3}$ .

D.  $\frac{28}{3}$ .

**Câu 25.** Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 4$ ,  $y = 2x - 4$  quay quanh trục Ox.

A.  $\frac{16\pi}{5}$

B.  $6\pi$

C.  $-6\pi$

D.  $\frac{16\pi}{15}$ .

**NHÓM TRƯỜNG: TÂN TRÀO, THÁI HÒA, LÂM BÌNH**