TRẦN CÔNG DIÊU

Chủ biên

TIẾP CẬN 11 CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM
GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM
MÔN TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chuyên đề 3. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Phần I: NGUYÊN HÀM

Nếu có hàm số $f(x)$ việc đi tính đạo hàm của nó chỉ cần áp dụng các công thức đã biết, công việc có vẻ không khó lắm. Thế nhưng tìm hàm số nào có đạo hàm bằng $f(x)$ thì sẽ khó hơn rất nhiều, có nghĩa là ta phải tìm hàm số $g(x)$ sao cho $g'(x)=f(x)$. Hãy cùng nghiên cứu kĩ hơn vấn đề này!

Định nghĩa. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nữa khoảng, đoạn của R). Nếu ta có hàm số $F(x)$ xác định trên K sao cho $F'(x)=f(x)$ thì $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

Định lí 1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lí 2. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $G(x)=F(x)+C$ với C là hằng số.

Định lí 3. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Tính chất của nguyên hàm:

- $\int f'(x)dx=f(x)+C$ với C là hằng số.
- $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int\left[f(x)+g(x)\right]f(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Bảng nguyên hàm

Chú ý: Công thức tính vi phân của $f(x)$ là $d\left[f(x)\right]=f'(x)dx$. Ví dụ $du=u'.dx$, $dt=t'.dx$ với u,t là hàm theo biến x.

	Với u là một hàm số
$\int 0dx=C$	$\int 0du=C$
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$
$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$\int u^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$
$\int\frac{1}{x}dx=ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{u}du=ln\lvert u\rvert+C$

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C$	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{ln\, a} + C$
$\int cosxdx = sinx + C$	$\int cos\, udu = sinu + C$
$\int sinxdx = -cosx + C$	$\int sin\, udu = -cosu + C$
$\int \dfrac{1}{cos^2 x} dx = tan\, x + C$	$\int \dfrac{1}{cos^2 u} du = tan\, u + C$
$\int \dfrac{1}{sin^2 x} dx = -cot\, x + C$	$\int \dfrac{1}{sin^2 u} du = -cot\, u + C$

Các phương pháp tính nguyên hàm

- ***Phương pháp 1. Sử dụng bảng nguyên hàm:***

Ví dụ 1 Tính $\int \left(\dfrac{1}{cos^2 x} + x^4 \right) dx$

Lời giải.

Ta có $\int \left(\dfrac{1}{cos^2 x} + x^4 \right) dx = \int \dfrac{1}{cos^2 x} dx + \int x^4 dx = tan\, x + \dfrac{x^5}{5} + C$

Ví dụ 2 Tính: $\int \left(2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = 2\int x^2 dx + \int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \dfrac{2}{3} x^3 + \int x^{-\frac{2}{3}} dx$

$= \dfrac{2}{3} x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} + C = \dfrac{2}{3} x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C$

Ví dụ 3 Tính $\int \left(3cosx - 3^{x-1} \right) dx$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(3cosx - 3^{x-1} \right) dx = \int 3\, cos\, xdx - \int 3^{x-1} dx = 3\, sinx\text{-}\dfrac{1}{3} \int 3^x dx + C = 3\, sinx - \dfrac{1}{3} . \dfrac{3^x}{ln 3} + C$

Ví dụ 4 Tính $\int \left(\dfrac{1}{x} - e^{x+1} \right) dx$

Lời giải.

Ta có $\int \left(\dfrac{1}{x} - e^{x+1} \right) dx = \int \dfrac{1}{x} dx - e\int e^x dx = ln|x| - e.e^x + C$

- ***Phương pháp 2. Đổi biến số***

Ví dụ 5 Tính $\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx$

Phân tích. Để ý khi ta đặt $t = cosx \Rightarrow dt=d\left(cosx\right) = -sin\,xdx$, ta cần phải chuyển tất cả về theo biến t. Muốn như vậy ta biến đổi $sin^2 x = 1 - cos^2 x = 1 - t^2$

Lời giải.

Ta có: $\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx = \int \frac{\left(1-cos^2 x\right)s\,inx}{cos^4 x}dx$, đặt $t = cosx \Rightarrow dt=d\left(cosx\right) = -sin\,xdx$.

Lúc này

$$\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4}.dt = -\int t^{-4}dt + \int t^{-2}dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{\left(cosx\right)^{-3}}{3} - \left(cos\,x\right)^{-1} + C$$

Ví dụ 6 Tính $\int \frac{x-1}{2x+1}dx$.

Phân tích. Khi nguyên hàm có dạng phân thức bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu ta thường dùng phép chia đa thức để giải.

Lời giải.

Ta có: $\int \frac{x-1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{3}{2x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{x}{2} + C + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx$

Đặt: $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$,

Lúc này: $\int \frac{1}{2x+1}dx = \int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln\left|t\right| = \frac{1}{2}ln\left|2x+1\right| + C$.

Do đó: $\int \frac{x-1}{2x+1}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}ln\left|2x+1\right| + C$

- ***Phương pháp 3. Nguyên hàm từng phần***

Chú ý:

- Các loại hàm cơ bản: hàm logarit, hàm đa thức, hàm lượng giác, hàm mũ.

- Khi nguyên hàm có dạng tích hai hàm nhân nhau ta thường sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

- Thứ tự đặt u là logarit, đa thức, lượng giác, mũ (đọc tắt là lô đa lượng mũ), sau khi đặt u thì toàn bộ lượng còn lại đặt là dv.

Ví dụ 7 Tính $\int \frac{ln\left(sinx\right)}{cos^2 x}dx$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = ln\left(s\,inx\right) \Rightarrow du = \frac{cosx}{s\,inx}dx \\ dv = \frac{dx}{cos^2 x} \Rightarrow v = tan\,x \end{cases}$.

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int \frac{ln\left(sinx\right)}{cos^2 x}dx = tan\,x.ln(s\,inx) - \int tan\,x.\frac{cos\,x}{sin\,x}dx = tan\,x.ln(s\,inx) - x + C$$

Ví dụ 8 Tính $\int cos\sqrt{x}dx$

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \dfrac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2tdt$, nguyên hàm viết lại thành:

$\int 2t\,cos\,tdt = 2\int t\,cos\,tdt$, tiếp tục dùng nguyên hàm từng phần để giải quyết.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = costdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = sin\,t \end{cases}$, áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta được:

$$\int cos\sqrt{x}dx = 2\int t\,cos\,tdt = 2t.sin\,t - 2\int sin\,tdt = 2t.sin\,t + 2cost + C = 2\sqrt{x}.sin\sqrt{x} + 2cos\sqrt{x} + C$$

Chú ý: Khi đặt $dv = f(x)dx$ ta tính v theo công thức $v = \int f(x)dx$, chắc hẳn nhiều em sẽ hỏi sau khi tính xong sẽ có thêm hằng số C nhưng tại sao ở các ví dụ trên lại không thấy C, thật ra là người ta đã chọn $C = 0$.

Phần II: TÍCH PHÂN

- **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn:

- Liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

- $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Lúc đó hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f\left(x\right)dx = F(b) - F(a)$.

Chú ý:

- a, b được gọi là 2 cận của tích phân.

- $a = b$ thì $\int_a^a f\left(x\right)dx = 0$.

- $a > b$ thì $\int_a^b f\left(x\right)dx = -\int_b^a f\left(x\right)dx$.

- Tích phân không phụ thuộc vào biến số tức là $\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(t\right)dt = F(b) - F(a)$.

- **Tính chất của tích phân:**

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $a < c < b$.

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

- $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Chú ý: Để tính tích phân từ a đến b, ta tiến hành tìm nguyên hàm rồi sau đó thay cận vào theo công thức $\int_a^b f\left(x\right)dx = F(b) - F(a)$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I=\int\limits_2^{\sqrt{7}}\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx$

A. $I=2$ **B.** $I=3$ **C.** $I=0$ **D.** $I=1$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2-3}\Rightarrow t^2=x^2-3$

$\Rightarrow tdt=xdx$

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=1; x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2$

Ta được $I=\int_1^2\frac{t}{t}dt=\int_1^2 dt=t\Big|_1^2=1$

Chọn đáp án D

Chú ý: Khi tích phân có căn ta thường đặt ẩn phụ t bằng căn.

Ví dụ 2 Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos^5 x)\sin xdx$.

A. $\frac{7}{6}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{7}{9}$

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos^5 xdx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$.

Khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=0+\left(\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\t=1\end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos^5 xdx=\int\limits_1^0 -t^5dt=\int\limits_0^1 t^5dt=\left(\frac{t^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$.

Vậy $I=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 3 Tính tích phân sau: $I=\int\limits_1^3\frac{1}{x}(ln x)^2 dx$

A. $I=\frac{(ln3)^2}{3}$ **B.** $I=\frac{(ln3)}{3}$ **C.** $I=\frac{(ln3)^3}{3}$ **D.** $I=\frac{(ln2)^3}{3}$

Lời giải

Đặt $u=ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận : $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=3 \Rightarrow u=ln3$

Khi đó: $I=\int_0^{ln3} u^2du=\left.\frac{u^3}{3}\right|_0^{ln3}=\frac{(ln3)^3}{3}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 4 Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{5}} x^3\sqrt{(x^2+4)}dx$

A. $I=\frac{53}{15}$ **B.** $I=\frac{23}{15}$ **C.** $I=\frac{253}{7}$ **D.** $I=\frac{253}{15}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}$. Suy ra $t^2=x^2+4$. Do đó $tdt=xdx$

$x=0 \Rightarrow t=2$, $x=\sqrt{5} \Rightarrow t=3$

Suy ra $I=\int_2^3 (t^2-4)t.tdt=\int_2^3 (t^4-4t^2)dt$

$I=\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}\right)\right|_2^3=\frac{63}{5}+\frac{64}{15}=\frac{253}{15}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 5 Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}+e^x\right)dx$

A. $I=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$ **B.** $I=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ **C.** $I=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$ **D.** $I=\frac{2\sqrt{3}+2}{3}$

Lời giải

Có $I=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}+e^x\right)dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx+\int_0^1 xe^xdx=I_1+I_2$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow tdt=xdx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$

Suy ra $I_1=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$, suy ra $I_2=\left.xe^x\right|_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-\left.e^x\right|_0^1=1$

Vậy $I=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 6 Tính tích phân sau: $I=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{\left(x^2+1\right)\ln x+1}{x\ln x}dx$

A. $I=\frac{e^4-e^2}{2}+2+\ln 2$

B. $I=\frac{e^4-e^2}{2}-1+\ln 2$

C. $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$

D. $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 3$

Lời giải

$$I=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{\left(x^2+1\right)\ln x+1}{x\ln x}dx=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{x^2+1}{x}dx+\int\limits_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int\limits_{e}^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\int\limits_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=J+K$$

$$J=\int\limits_{e}^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\right|_{e}^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}+1$$

$$K=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{1}{\ln x}d\left(\ln x\right)=\left.\ln|\ln x|\right|_{e}^{e^2}=\ln 2$$

$$I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$$

Chọn đáp án C.

Chú ý: $\frac{1}{x}dx=d\left(\ln x\right)$

Ví dụ 7 Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}x\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

A. $I=e^2-1$ **B.** $I=e^2$ **C.** $I=e^2+1$ **D.** $I=e^2-2$

Lời giải

$$I=\int\limits_{1}^{2}xe^x dx-\int\limits_{1}^{2}dx=I_1-I_2$$

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow I_1=\left.xe^x\right|_1^2-\int\limits_{1}^{2}e^x dx=2e^2-e-\left.e^x\right|_1^2=e^2$

$I_2=\left.x\right|_1^2=1\Rightarrow I=e^2-1$

Chọn đáp án A

Ví dụ 8 Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{3x^2+1}dx$

A. $I=\frac{7}{9}$ **B.** $I=\frac{2}{9}$ **C.** $I=\frac{4}{9}$ **D.** $I=\frac{5}{9}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x^2+1}\Rightarrow t^2=3x^2+1\Rightarrow tdt=3xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=2$

$$I=\frac{1}{3}\int_1^2 t^2dt=\left.\frac{t^3}{9}\right|_1^2=\frac{7}{9}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 9 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2)\sin 3xdx.$

A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $\frac{7}{10}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\dv=\sin 3xdx\end{cases}$ ta được $\begin{cases}du=dx\\v=-\dfrac{\cos 3x}{3}\end{cases}$

Do đó: $I=\left(-\dfrac{(x-2)\cos 3x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx$

$$I=\left(-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\frac{\sin 3x}{9}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{7}{9}.$$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 10 Tính tích phân $I=\int_1^e x(1+\ln x)dx$

A. $I=\frac{3e^2+1}{4}$ B. $I=\frac{3e^2-2}{4}$ C. $I=\frac{3e^2}{4}$ D. $I=\frac{3e^2-1}{4}$

Lời giải

Đặt: $u=1+\ln x;\ dv=xdx$. Suy ra $du=\frac{1}{x}dx;\ v=\frac{x^2}{2}$

Khi đó: $I=\left.\frac{x^2}{2}(1+\ln x)\right|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx$

$$=\left.\frac{x^2}{2}(1+\ln x)\right|_1^e-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e=\frac{3e^2-1}{4}$$

Chọn đáp án D

Ví dụ 11 Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(2+\cos 2x)dx$

A. $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ B. $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}$ C. $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}$ D. $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}$

Lời giải

Đặt: $u=x,\ dv=(2+\cos 2x)dx$. Suy ra: $du=dx,\ v=2x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

$$I = x\left(2x+\frac{1}{2}sin2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x+\frac{1}{2}sin2x\right)dx = \frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{8}-\left(x^2-\frac{1}{4}cos2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 12 Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

A. $I = 2(\sqrt{3}-2)$ **B.** $I = 2(\sqrt{3}-4)$ **C.** $I = 2(\sqrt{3}-1)$ **D.** $I = 2(\sqrt{3}-3)$

Lời giải

Đặt: $u = \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow u^2 = x^2+x+1 \Rightarrow 2udu = (2x+1)dx$

Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u=\sqrt{3}$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{2udu}{u} = \int_1^{\sqrt{3}}2du = 2u\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 13 Tính tích phân $I = \int_1^2\frac{x^2-1}{x^2}ln\,xdx$

A. $I = \frac{5}{2}ln2-\frac{3}{2}$ **B.** $I = \frac{5}{2}ln2-\frac{1}{2}$ **C.** $I = \frac{5}{2}ln2-1$ **D.** $I = \frac{5}{2}ln2$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = ln\,x \\ dv = \frac{x^2-1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dv \\ v = \left(x+\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

$$I = \left(x+\frac{1}{x}\right)ln\,x\Bigg|_1^2 - \int_1^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$I = \left(x+\frac{1}{x}\right)ln\,x\Bigg|_1^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 \Rightarrow I = \frac{5}{2}ln2-\left(x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{5}{2}ln2-\frac{3}{2}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 14 Tính tích phân $I = \int_2^5\frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}dx$

A. $\frac{386}{15}$ **B.** $\frac{385}{15}$ **C.** $\frac{384}{15}$ **D.** $\frac{387}{15}$

Lời giải

Đặt: $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2+1 = x \Rightarrow dx = 2t.dt$

Đổi cận: $x=2 \Rightarrow t=1$; $x=5 \Rightarrow t=2$

$$I=\int_1^2\frac{(t^2+1)^2+1}{t}.2t.dt=\int_1^2(2t^4+4t^2+4)dt=\left(\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+4t\right)\Bigg|_1^2=\frac{386}{15}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 15 Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+sin\,x}{cos^2x}dx$

A. $I=\sqrt{3}+1$ **B.** $I=\sqrt{3}+3$ **C.** $I=\sqrt{3}+2$ **D.** $I=\sqrt{3}-1$

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+sin\,x}{cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{cos^2x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sin\,x}{cos^2x}dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{cos^2x}dx=tan\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$$

Đặt $t=cos\,x\Rightarrow dt=-sin\,xdx$

Suy ra $I_2=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{t^2}=\frac{1}{t}\Big|_1^{\frac{1}{2}}=1$

Vậy $I=\sqrt{3}+1$. **Chọn đáp án A.**

Ví dụ 16 Tính: $I=\int_{-1}^{1}\left(3\sqrt{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$

A. $I=4\sqrt{2}+ln3$ **B.** $I=4\sqrt{3}+ln3$ **C.** $I=4\sqrt{2}+ln2$ **D.** $I=2\sqrt{2}+ln3$

Lời giải

Ta có: $I=\int_{-1}^{1}3\sqrt{x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}dx=I_1+I_2$

Tính: $I_1=\int_{-1}^{1}3(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=4\sqrt{2}$

Tính: $I_2=ln(x+2)\Big|_{-1}^{1}=ln3$

Vậy: $I=4\sqrt{2}+ln3$

Chọn đáp án A

Chú ý: $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$.

Ví dụ 17 Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{4x+3}{2x+1}dx$

A. $I=2+\frac{1}{2}ln3$ **B.** $I=1+\frac{1}{2}ln3$ **C.** $I=2-\frac{1}{2}ln3$ **D.** $I=2+\frac{1}{2}ln2$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^1 \frac{4x+3}{2x+1}dx=\int_0^1\left(2+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$=\int_0^1 2dx+\int_0^1\frac{1}{2x+1}dx=2x\Big|_0^1+\left(\frac{1}{2}ln\left|2x+1\right|\right)\Big|_0^1=2+\frac{1}{2}ln3$

Chọn đáp án A

Ví dụ 18 Tính tích phân: $I=\int_0^1\left(x+e^{2x}\right)xdx$

A. $I=\frac{e^2}{4}+\frac{7}{11}$ **B.** $I=\frac{e^2}{4}+\frac{7}{12}$ **C.** $I=\frac{e^2}{4}+\frac{5}{12}$ **D.** $I=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{12}$

Lời giải

$I=\int_0^1\left(x+e^{2x}\right)xdx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 xe^{2x}dx=I_1+I_2$

$I_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

Tính $I_2=\int_0^1 xe^{2x}dx$

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx$; $dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}$

$I_2=\frac{x}{2}.e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{e^2}{4}+\frac{7}{12}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 19 Tính tích phân: $I=\int_1^e\left(\frac{lnx}{x^2}+1\right)xdx$

A. $I=\frac{e^3}{2}$ **B.** $I=\frac{e}{2}$ **C.** $I=\frac{e^2}{3}$ **D.** $I=\frac{e^2}{2}$

Lời giải

$I=\int_1^e(\frac{lnx}{x^2}+1)xdx=\int_1^e\frac{lnx}{x}dx+\int_1^e xdx$

•$\int_1^e\frac{lnx}{x}dx=\int_1^e lnx\,d\left(lnx\right)=\frac{ln^2x}{2}\Big|_1^e=\frac{1}{2}$

•$\int_1^e xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$

•$I=\frac{e^2}{2}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 20 Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)ln\,xdx$.

A. $I=\frac{3e-4}{2e}$ **B.** $I=\frac{e-4}{2e}$ **C.** $I=\frac{3e+4}{2e}$ **D.** $I=\frac{3e-3}{2e}$

Lời giải

Ta có: $I=\int_1^e\frac{ln\,x}{x}dx+\int_1^e\frac{ln\,x}{x^2}dx$

+ $I_1=\int_1^e\frac{ln\,x}{x}dx=\int_1^e ln\,xd(ln\,x)=\frac{1}{2}ln^2x\Big|_1^e=\frac{1}{2}$

+ Tính $I_2=\int_1^e\frac{ln\,x}{x^2}dx$

Đặt $u=ln\,x,\ dv=\frac{1}{x^2}dx\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx, v=\frac{-1}{x}$

$I_2=-\frac{ln\,x}{x}\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=1-\frac{2}{e}$

Vậy $I=\frac{3e-4}{2e}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 21 Tính tích phân: $I=\int_2^{\frac{11}{3}}\frac{xdx}{(x-1)\sqrt{3x-2}}$.

A. $I=\frac{4}{3}+ln\frac{3}{2}$ **B.** $I=\frac{2}{3}+ln\frac{1}{2}$ **C.** $I=\frac{2}{3}+ln\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{2}{3}+ln\frac{5}{2}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x-2}\Rightarrow t^2=3x-2\Rightarrow 2tdt=3dx\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$

$x=2\Rightarrow t=2;\ x=\frac{11}{3}\Rightarrow t=3$

$\frac{xdx}{(x-1)\sqrt{3x-2}}=\frac{2}{3}\frac{t^2+2}{t^2-1}dt=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]dt$

Suy ra $I=\int_2^3\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]dt=\left[\frac{2}{3}t+ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Big|_2^3=\frac{2}{3}+ln\frac{3}{2}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 22 Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(x+cos\,x)dx$.

A. $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}$ **B.** $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}+2$ **C.** $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}-1$ **D.** $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}-2$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$

Với $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

Với $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$I_2 = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Vậy $I = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2} - 1$

Chọn đáp án C

Ví dụ 23 Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + \sin x)\cos x dx$

A. $I = \pi - \frac{3}{2}$ **B.** $I = \pi$ **C.** $I = \pi - \frac{1}{2}$ **D.** $I = \pi + \frac{3}{2}$

Lời giải

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$I_2 = 2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \pi + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 \Rightarrow I = \pi - \frac{3}{2}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 24 Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x)\cos x\, dx$

A. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$ **B.** $I = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{3}$ **C.** $I = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ **D.** $I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

Lời giải

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx = I_1 + I_2$

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,d(sin x)=\frac{sin^3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$I=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 25 Tính tích phân: $I=\int_0^1(x+1)(e^x-3)dx$.

A. $I=e-\frac{9}{2}$ **B.** $I=e-3$ **C.** $I=e+\frac{9}{2}$ **D.** $I=e-\frac{3}{2}$

Lời giải

$$\begin{cases}u=x+1\\ dv=(e^x-3)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=(e^x-3x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=(x+1)(e^x-3x)\Big|_0^1-\int_0^1(e^x-3x)dx$$

$$=(x+1)(e^x-3x)\Big|_0^1-\left(e^x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1=e-\frac{9}{2}$$

Chọn đáp án A

Chú ý: $v=\int(e^x-3)dx=(e^x-3x)+C$, chọn $C=0$

Ví dụ 26 Tính tích phân: $I=\int_0^1 2x\left[x+ln(1+x)\right]dx$

A. $I=\frac{2}{3}$ **B.** $I=\frac{7}{6}$ **C.** $I=\frac{5}{6}$ **D.** $I=\frac{11}{6}$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^1 2x\left[x+ln(1+x)\right]dx=\int_0^1 2x^2dx+\int_0^1 2x\,ln(1+x)dx=I_1+I_2$

Tính: $I_1=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

Tính: $I_2=\int_0^1 2x\,ln(1+x)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=ln(1+x)\\ dv=2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x+1}dx\\ v=x^2\end{cases}$.

Do đó: $I_2=x^2\,ln(1+x)t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=ln2-\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=ln2-\int_0^1(x-1+\frac{1}{x+1})dx$

$=ln2-\left[\frac{1}{2}x^2-x+ln(1+x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

Vậy: $I=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 27 Tính tích phân sau: $I=\int_1^2 x\left(\frac{2}{x^2+1}+\ln x\right)dx$.

A. $I=\ln 10-\frac{3}{4}$ **B.** $I=\ln 10-\frac{1}{4}$ **C.** $I=\ln 10-\frac{5}{4}$ **D.** $I=\ln 10+\frac{1}{4}$

Lời giải

$I=\int_1^2 x\left(\frac{2}{x^2+1}+\ln x\right)dx=\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx+\int_1^2 x.\ln x dx$

Tính: $I_1=\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^2 \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\ln 5-\ln 2$

Tính: $I_2=\int_1^2 x\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$ $I_2=\frac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 \frac{x}{2}dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$

Vậy $I=\ln 5+\ln 2-\frac{3}{4}=\ln 10-\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 28 Tính tích phân $I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx$

A. $I=\frac{2e^4+e^2}{4}$ **B.** $I=\frac{2e^4+e^2-1}{4}$ **C.** $I=\frac{2e^4+e^3}{4}$ **D.** $I=\frac{2e^4}{4}$

Lời giải

$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=2\int_1^e x^3dx+\int_1^e x\ln x dx$

$2\int_1^e x^3dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_1^e=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$

Ta có: $\int_1^e x\ln x dx=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^2\frac{1}{x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[e^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right]=\frac{e^2+1}{4}$

$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)+\frac{e^2+1}{4}=\frac{2e^4+e^2-1}{4}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 29 Tính tích phân $I=\int_2^3 x\left[3x-2\ln\left(x-1\right)\right]dx$

A. $I=\frac{45}{2}$ **B.** $I=8\ln 2$ **C.** $I=\frac{45}{2}-8\ln 2$ **D.** $I=\frac{45}{2}+8\ln 2$

Lời giải

$I=\int_2^3 3x^2dx-\int_2^3 2x\ln\left(x-1\right)dx=x^3\Big|_2^3-I_1=19-I_1$

$I_1=\int_2^3 2x\,ln(x-1)dx$

Đặt $\begin{cases} u=ln(x-1) \\ dv=2xdx \end{cases}$, Suy ra $I_1=x^2 ln(x-1)\Big|_2^3-\int_2^3 x^2 d(ln(x-1))=9ln2-\int_2^3\frac{x^2}{x-1}dx$

$=9ln2-\int_2^3\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=9ln2-\left(\frac{x^2}{2}+x+ln|x-1|\right)\Bigg|_2^3=8ln2-\frac{7}{2}$

Vậy $I=\frac{45}{2}-8ln2$

Chọn đáp án C

Ví dụ 30 Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^2+ln^2x}{x}dx$

A. $I=\frac{ln^3 2}{3}$ **B.** $I=\frac{3}{2}$ **C.** $I=\frac{3}{2}+\frac{ln^3 2}{3}$ **D.** $I=\frac{5}{2}+\frac{ln^3 2}{3}$

Lời giải

Ta tách tích phân I như sau: $I=\int_1^2 xdx+\int_1^2\frac{ln^2x}{x}dx$

• $I_1=\int_1^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3}{2}$

• $I_2=\int_1^2\frac{ln^2x}{x}dx$. Đặt $t=lnx\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=ln2;\ x=1\Rightarrow t=0$

$I_2=\int_0^{ln2}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{ln2}=\frac{ln^3 2}{3}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{3}{2}+\frac{ln^3 2}{3}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 31 Tính: $I=\int_1^{\sqrt5}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}.x^3+lnx}{x^2}\right)dx$

A. $I=-\frac{1}{\sqrt5}ln\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}-\frac{11}{3}$

B. $I=-\frac{1}{\sqrt5}ln\sqrt5+\frac{1}{\sqrt5}+\frac{11}{3}$

C. $I=\frac{1}{\sqrt5}ln\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}+\frac{11}{3}$

D. $I=-\frac{1}{\sqrt5}ln\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}+\frac{11}{3}$

Lời giải

$I=\int_1^{\sqrt5}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}.x^3+lnx}{x^2}\right)dx=\int_1^{\sqrt5}\sqrt{x^2-1}.xdx+\int_1^{\sqrt5}\left(\frac{lnx}{x^2}\right)dx$

$\int_1^{\sqrt5}\sqrt{x^2-1}.xdx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt5}\sqrt{x^2-1}.d(x^2-1)=\frac{(\sqrt{x^2-1})^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt5}=\frac{8}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^{\sqrt{5}}-\int_1^{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\sqrt{5}-\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+1$$

Do đó: $I=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{11}{3}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 32 Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}x\left(x+\sin x\right)dx$

A. $I=\frac{1}{3}\pi^3+\pi$ **B.** $I=\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}$ **C.** $I=\pi\sqrt{3}$ **D.** $I=\frac{\pi}{4}$

Lời giải

$$I=\int_0^{\pi}x^2dx+\int_0^{\pi}x\sin x dx=\int_0^{\pi}x^2dx-\int_0^{\pi}xd(\cos x)$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}-\left(x\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos xdx=\frac{\pi^3}{3}+\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}\quad I=\frac{1}{3}\pi^3+\pi$$

Chọn đáp án A.

Ví dụ 33 Tính tích phân: $I=\int_1^{2}\left(4x+3\right).\ln xdx$.

A. $I=16\ln 3-4$ **B.** $I=14\ln 2+6$ **C.** $I=14\ln 2-6$ **D.** $I=16\ln 2-6$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\left(4x+3\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=2x^2+3x\end{cases}$.

Khi đó $I=\left(2x^2+3x\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{2x^2+3x}{x}dx$

$=14\ln 2-0-\left(x^2+3x\right)\Big|_1^2$

$=14\ln 2-0-\left[\left(2^2+3.2\right)-\left(1^2+3.1\right)\right]$

$=14\ln 2-\left(10-4\right)$

$=14\ln 2-6.$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 34 Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}x\left(\frac{2}{x^2+1}+\sin x\right)dx$

A. $\ln\left(\pi^2+2\right)=\pi$ **B.** $\ln\left(\pi^2+1\right)+\pi$ **C.** $\ln\left(\pi^2+1\right)-\pi$ **D.** $\ln\left(\pi^2+1\right)$

Lời giải

$$I=\int_0^{\pi}x\left(\frac{2}{x^2+1}+\sin x\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_0^{\pi}x.\sin xdx$$

Tính $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^{\pi} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{\pi} = ln\left(\pi^2+1\right)$

Tính $I_2 = \int_0^{\pi} x\sin x dx$

Đặt $\begin{cases} x = u \\ \sin x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$I_2 = -x.\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$

Vậy $I = ln(\pi^2+1) + \pi$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 35 Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(2+\sin 2x)dx$.

A. $I = \frac{\pi+\sqrt{2}}{3}$ **B.** $I = \frac{\pi-2}{3}$ **C.** $I = \frac{\pi+\pi^2}{4}$ **D.** $I = \frac{\pi+\pi^2}{4}$

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx = x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$

Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$\Rightarrow J = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2xdx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Vậy $I = \frac{\pi^2+\pi}{4}$

Chọn đáp án D.

Ví dụ 36 Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

A. $I = \frac{28}{27} + \frac{2}{3}ln\frac{3}{2}$ **B.** $I = \frac{2}{3} - \frac{28}{27}ln\frac{3}{2}$ **C.** $I = \frac{28}{27} - \frac{2}{3}ln\frac{3}{2}$ **D.** $I = \frac{3}{2} - \frac{28}{27}ln\frac{2}{3}$

Lời giải

Đặt: $\sqrt{3x+1} = t$ ta được $x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$

Khi đó: $I = \frac{2}{9}\int_1^2 \frac{2t^3+t}{1+t}dt = \frac{2}{9}\int_1^2 \left(2t^2 - 2t + 3 - \frac{3}{t+1}\right)dt$

$= \frac{28}{27} - \frac{2}{3}ln\frac{3}{2}$

Chọn đáp án A.

Ví dụ 37 Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx$. Đáp án nào sau đây đúng:

A. $-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2$ **B.** $-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dxd$ **C.** $\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dxd$ **D.** $\int_1^2\frac{1}{x^2}dxd$

Lời giải

$$I=\int_1^2 xdx-2\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{3}{2}-2\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$$

Tính: $J=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$

Đặt: $u=\ln x, dv=\frac{1}{x^2}dx$. Khi đó $du=\frac{1}{x}dx, v=-\frac{1}{x}$

Do đó: $J=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 38 Tính tích phân: $I=\int_0^1(1-x)e^xdx$.

A. $I=e-1$ **B.** $I=e+1$ **C.** $I=e+2$ **D.** $I=e-2$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=1-x\\dv=e^xdx\end{cases}$ ta có $\begin{cases}du=-dx\\v=e^x\end{cases}$

Suy ra: $I=(1-x)e^x\Big|_0^1+\int_0^1e^xdx=(1-x)e^x\Big|_0^1+e^x\Big|_0^1$

$I=e-2$

Chọn đáp án D.

Ví dụ 39 Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(\frac{2}{1+x^2}+e^x\right)dx$.

A. $I=1-\ln 2$ **B.** $I=1+\ln 2$ **C.** $I=2+\ln 2$ **D.** $I=1+\ln 3$

Lời giải

+ Tính được $I_1=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln 2$

+ Tính được $I_2=\int_0^1 xe^xdx=1$

+ Tính đúng đáp số I = $1+\ln 2$

Chọn đáp án B.