

# TUYỂN TẬP HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG HAY VÀ ĐẶC SẮC

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

**Đề bài 01 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A (1; 5), điểm B nằm trên đường thẳng  $(d_1) : 2x + y + 1 = 0$  và chân đường cao hạ đỉnh B xuống đường thẳng AC nằm trên đường thẳng  $(d_2) : 2x + y - 8 = 0$ . Biết điểm M (3; 0) là trung điểm của cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.

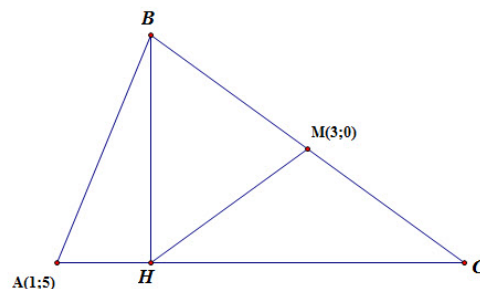
**Lời giải tham khảo :**

Gọi điểm  $B(a; -2a - 1) \in (d_1)$

Điểm  $H(b; 8 - 2b) \in (d_2)$

Ta có M là trung điểm của BC  $\Rightarrow C(6 - a; 2a + 1)$

Ta có  $H \in AC$  nên  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{HC}$  cùng phương



$$\overrightarrow{AH} = (b - 1; 3 - 2b) \text{ và } \overrightarrow{HC} = (6 - a - b; 2a + 2b - 7)$$

$$\overrightarrow{AH} \text{ và } \overrightarrow{HC} \text{ cùng phương} \Rightarrow \frac{b - 1}{6 - a - b} = \frac{3 - 2b}{2a + 2b - 7} \Leftrightarrow a = 11 - 6b \quad (1)$$

H là chân đường cao hạ từ B xuống AC  $\Rightarrow AH \perp BH \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} &= (b - a; 2a - 2b + 9) \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (b - 1)(b - a) + (3 - 2b)(2a - 2b + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5b^2 - 5ab - 25ab + 7a + 27 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) ta được  $5b^2 - 5b(11 - 6b) - 25b + 7(11 - 6a) + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow 35b^2 - 122b + 104 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = \frac{52}{35} \end{cases}$$

Thay ngược lại ta có điểm B và C cần tìm

**Đề bài 02 :** Trong hệ tọa độ Oxy hình thang cân ABCD có diện tích bằng  $\frac{45}{2}$ , đáy lớn CD nằm trên đường thẳng  $(d) : x - 3y - 3 = 0$ . Biết hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm I (2; 3). Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm C có hoành độ dương.

**Lời giải tham khảo :**

ABCD là hình thang cân  $\Rightarrow$  tam giác ICD vuông cân tại I

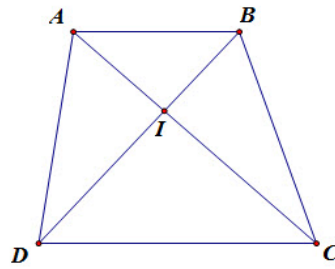
$$\text{Ta có } CD = 2d(I; CD) = 2 \cdot \frac{|2 - 3 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \Rightarrow IC = \sqrt{20}$$

$$\text{Lấy } C(3a + 3; a) \in (d) \Rightarrow IC^2 = (3a + 1)^2 + (a - 3)^2 = 20 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow C(6; 1)$$

Phương trình BD đi qua điểm I và nhận  $\overrightarrow{IC}$  làm vtpt  $\Rightarrow BD : 2x - y - 1 = 0$

D là giao điểm của BD và CD  $\Rightarrow D(0; -1)$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG



Đặt  $IA = IB = x \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2}x^2; S_{IAD} = x\sqrt{5} = S_{IBC}; S_{ICD} = 10$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}x^2 + 2x\sqrt{5} + 10 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} & (tm) \\ x = -5\sqrt{5} & (loai) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{IB} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \quad (*)$$

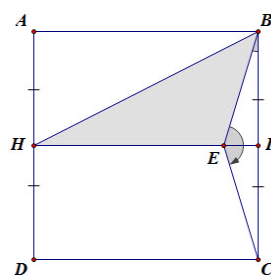
Gọi  $B(b; 2b - 1) \in BD$  từ  $(*) \Rightarrow B(3; 5)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và C  $\Rightarrow BC : 4x + 3y - 27 = 0$ .

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 03 (k2pi Lần 15 - 2014)** : Trong hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có phương trình đường thẳng AD là  $(d) : 3x - 4y - 7 = 0$ . Gọi E là điểm nằm bên trong hình vuông ABCD sao cho tam giác EBC cân có  $\widehat{BEC} = 150^\circ$ . Viết phương trình đường thẳng AB biết điểm  $E(2; -4)$ .

**Lời giải tham khảo :**



Tam giác BEC cân và có  $\widehat{BEC} = 150^\circ \Rightarrow$  tam giác BEC cân tại E

Gọi H là hình chiếu của E lên AD  $\Rightarrow H$  là trung điểm của AD và  $HE = d(E; AD) = 3$

Đặt cạnh hình vuông là  $AB = x$

Tam giác BEC cân tại E có  $\widehat{BEC} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{EBC} = 15^\circ$ . Gọi I là trung điểm của BC  $\Rightarrow BI = \frac{x}{2}; EI = x - 3$

Tam giác BIE vuông tại I có góc  $\widehat{EBI} = 15^\circ \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{EI}{BI} = \frac{2x - 6}{x}$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} = \frac{2x - 6}{x} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$$

Phương trình đường thẳng EH qua điểm E và vuông góc với AD  $\Rightarrow EH : 4x + 3y + 4 = 0$

Đường thẳng AB // EH  $\Rightarrow$  AB có dạng  $(d) : 4x + 3y + \alpha = 0$

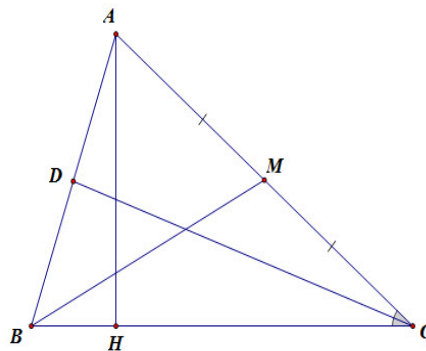
$$\text{Ta có } d(E, AB) = \frac{|\alpha - 4|}{5} = BI = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 4 \pm 5\sqrt{3}$$

Phương trình đường thẳng AB là  $(d) : 4x + 3y + 4 \pm 5\sqrt{3} = 0$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 04 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC biết đường cao kẻ từ A, trung tuyến kẻ từ B và phân giác kẻ từ C có phương trình lần lượt là  $(d_1) : 3x - 4y + 27 = 0$ ;  $(d_2) : 4x + 5y - 3 = 0$ ;  $(d_3) : x + 2y - 5 = 0$ . Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Lời giải tham khảo :**



Ta có  $AH \perp BC \Rightarrow BC$  có vtcp là  $\vec{u}_4 = (3; -4)$

Gọi  $\vec{u}_5 = (a; b)$  là vtcp của đường thẳng AC. Ta có CD là phân giác trong góc C

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = \cos(\vec{u}_3, \vec{u}_5) \quad \vec{u}_3 = (2; -1)$$

$$\Rightarrow \frac{|2a - b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{4}{3}a \end{cases}$$

Với  $b = -\frac{4}{3}a \Rightarrow$  chọn  $\vec{u}_5 = (3; -4)$  loại vì trùng với  $\vec{u}_4$

Với  $b = 0 \Rightarrow \vec{u}_5 = (1; 0)$

Điểm  $A \in (d_1) \Rightarrow A(-1 + 4a; 6 + 3a)$  và  $C \in (d_3) \Rightarrow C(5 - 2c; c) \Rightarrow \vec{AC} = (6 - 2c - 4a; c - 3a - 6)$

Ta có  $\vec{u}_5$  và  $\vec{AC}$  cùng phương  $\Rightarrow c - 3a - 6 = 0 \quad (1)$

M là trung điểm của AC  $\Rightarrow M\left(\frac{4a + 5 - 2c}{2}; \frac{3a + c + 6}{2}\right)$ . Trung điểm M thuộc  $(d_2)$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{4a + 4 - 2c}{2} + 5 \cdot \frac{3a + c + 6}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 31a - 3a + 40 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow a = 1; c = 3 \Rightarrow A(-5; 3); C(-1; 3)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với AH  $\Rightarrow BC : 4x + 3y - 5 = 0$

B là giao điểm của BM và BC  $\Rightarrow B(2; -1)$

Bài toán cơ bản : Biết tọa độ 3 đỉnh tam giác tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm  $I\left(-3; -\frac{13}{8}\right)$  và  $R = \frac{5\sqrt{65}}{8}$ .

**Đề bài 05 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB và BC lần lượt là  $(d_1) : 7x - y + 17 = 0; (d_2) : x - 3y - 9 = 0$ . Viết phương trình đường cao xuất phát từ đỉnh C của tam giác ABC biết điểm  $M(2; -1)$  nằm trên đường thẳng AC.

**Lời giải tham khảo :**

Đường thẳng AB có vtpt là  $\vec{n}_1 = (7; -1)$ , BC có vtpt là  $\vec{n}_2 = (1; -3)$

Gọi  $\vec{n}_3 = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng AC

$$\text{Tam giác ABC cân tại A} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos(\vec{n}_2, \vec{n}_3) \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{10}} = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 6ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -7b \end{cases}$$

✓ Với  $a = -7b$  chọn  $\vec{n}_3 = (7; -1)$  loại vì cùng phương với  $\vec{n}_1$

✓ Với  $a = b$  chọn  $\vec{n}_3 = (1; 1) \Rightarrow$  đường thẳng AC :  $x + y - 1 = 0$

Tọa độ C là giao điểm của BC và AC  $\Rightarrow C(3; -2)$

Phương trình đường cao xuất phát từ C là  $(d) : x + 7y + 11 = 0$ .

**Đề bài 06 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường cao và đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A lần lượt là  $(d_1) : x - 2y = 0; (d_2) : x - y + 1 = 0$ . Biết điểm  $M(1; 0)$  nằm trên cạnh AB và diện tích tam giác ABC bằng  $\frac{180}{7}$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

**Lời giải tham khảo :**

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

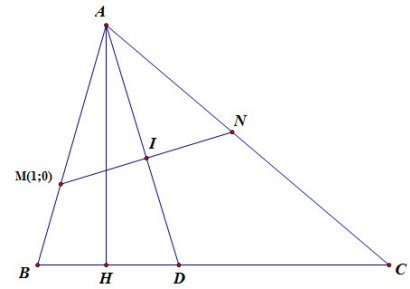
A là giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_2) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $A(-2; -1)$

Qua M kẻ đường thẳng  $\perp (d_2)$  cắt  $(d_2)$  tại I và AC tại N

MN qua M và  $\perp (d_2) \Rightarrow (MN) : x + y - 1 = 0$

I là giao điểm của MN và  $(d_2) \Rightarrow I(0; 1)$

I là trung điểm của MN  $\Rightarrow N(-1; 2)$



Phương trình đường thẳng  $(AB) : x - 3y - 1 = 0$  và  $(AC) : 3x - y + 5 = 0$

Điểm  $B \in AB \Rightarrow B(3a + 1; a)$ , điểm  $C \in AC \Rightarrow C(b; 3b + 5)$

Ta có  $BC \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AH} = (2; 1); \overrightarrow{BC} = (b - 3a - 1; 3b + 5 - a)$

$$\Rightarrow 2(b - 3a - 1) + (3b + 5 - a) = 0 \Leftrightarrow 5b - 7a + 3 = 0 \quad (1)$$

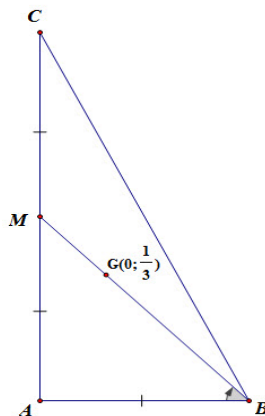
$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = \frac{|8b + 14|}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{(3a + 3)^2 + (a + 1)^2} = \frac{180}{7} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{7} \\ a = -\frac{22}{7} \end{cases} \text{ thay ngược lại ta có các điểm A, B, C.}$$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 07 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có  $AC = 2AB$ , phương trình đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình là  $(d) : 2x - y + 7 = 0$ , điểm  $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$  là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ bé hơn -2.

**Lời giải tham khảo :**



Gọi M là trung điểm của AC  $\Rightarrow AM = MC = AB \Rightarrow \triangle BAM$  vuông cân tại A  $\Rightarrow \widehat{MBA} = 45^\circ$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Gọi  $\vec{n}_1$  là vtpt của đường thẳng  $(d) \Rightarrow \vec{n}_1 = (2; -1)$  và  $\vec{n}_2 = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng BG  
 $\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{|2a - b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ a = -\frac{1}{3}b \end{cases}$$

✓ Với  $a = 3b$  chọn  $\vec{n}_2 = (3; 1) \Rightarrow$  đường thẳng BG qua G có vtpt  $\vec{n}_2 \Rightarrow BG : 9x + y - 1 = 0$

B là giao điểm của AB và BG  $\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases}$  loại do hoành độ điểm B nhỏ hơn  $-2$

✓ Với  $a = -\frac{b}{3}$  chọn  $\vec{n}_2 = (1; -3) \Rightarrow$  đường thẳng BG qua G có vtpt  $\vec{n}_2 \Rightarrow BG : x - 3y + 1 = 0$

B là giao điểm của AB và BG  $\Rightarrow B(-4; -1)$  (thỏa mãn)

M là trung điểm của AC  $\Rightarrow M(3a - 1; a) \in BG$  ta có  $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} \Rightarrow M(2; 1)$

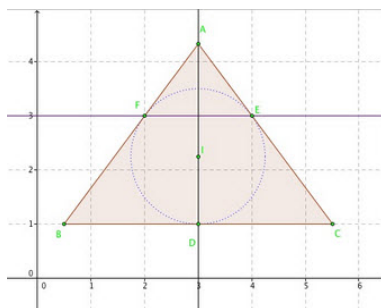
Phương trình đường thẳng AC đi qua điểm M và vuông góc với AB  $\Rightarrow AC : x + 2y - 4 = 0$

Tọa độ điểm A là giao điểm AC và AB  $\Rightarrow A(-2; 3) \Rightarrow C(6; -1)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 08 (k2pi Lần 14 - 2014)** : Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm  $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB tại D, E và F. Biết điểm  $D(3; 1)$  và phương trình đường thẳng EF có phương trình là  $(d) : y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh A biết đỉnh A có tung độ không âm.

**Lời giải tham khảo :**



Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm B và D  $\Rightarrow BC : y - 1 = 0 \Rightarrow BC \parallel EF$

Do đó tam giác ABC cân tại A và D chính là trung điểm của BC.

Phương trình đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với BC  $\Rightarrow AD : x - 3 = 0$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Điểm  $E(a; 3) \in EF$  ta có  $BE = BD \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$

✓  $a = 2 \Rightarrow$  phương trình AB đi qua điểm B và E  $\Rightarrow AB : 4x - 3y + 1 = 0$

A là giao điểm của AB và AD  $\Rightarrow A\left(3; \frac{13}{3}\right)$

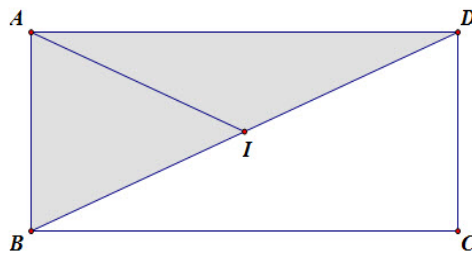
✓  $a = -1 \Rightarrow$  phương trình AB đi qua điểm B và E  $\Rightarrow AB : 4x + 3y - 5 = 0$

A là giao điểm của AB và AD  $\Rightarrow A\left(3; -\frac{7}{3}\right)$  ( loại)

Vậy điểm  $A\left(3; \frac{13}{3}\right)$

**Đề bài 09 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có  $AD = 2AB$  điểm  $A(1; 5)$ , phương trình đường chéo BD là  $3x + 4y - 13 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật biết B có hoành độ âm.

**Lời giải tham khảo :**



Xét tam giác ABD vuông tại A có  $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 5AB^2 \Rightarrow BD = AB\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Phương trình đường chéo BD có vtpt  $\vec{n}_1 = (3; 4)$ . Gọi  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng AB

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABD} = \frac{|3a + 4b|}{5\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 4a^2 + 24ab + 11b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{2}b \\ a = -\frac{1}{2}b \end{cases}$$

✓ Với  $a = -\frac{11}{2}b$  chọn  $\vec{n} = (11; -2) \Rightarrow$  đường thẳng AB có phương trình  $11x - 2y - 1 = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và BD  $\Rightarrow B\left(\frac{3}{5}; \frac{14}{5}\right)$  loại do B có hoành độ âm.

✓ Với  $a = -\frac{1}{2}b$  chọn  $\vec{n} = (1; -2) \Rightarrow$  đường thẳng AB có phương trình  $x - 2y + 9 = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và BD  $\Rightarrow B(-1; 4)$  ( thỏa mãn )



## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Phương trình đường thẳng AD đi qua điểm A và vuông góc với AB  $\Rightarrow AD : 2x + y - 7 = 0$

Tọa độ điểm D là giao điểm của AD và BD  $\Rightarrow D(3; 1)$

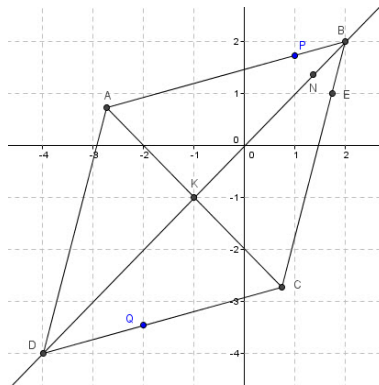
Trung điểm I của BD có tọa độ  $I\left(1; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow C(1; 0)$

Vậy  $B(-1; 4); D(3; 1); C(1; 0)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 10 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có phương trình đường chéo BD là  $(d) : x - y = 0$ . Đường thẳng AB đi qua điểm  $P(1; \sqrt{3})$ , đường thẳng CD đi qua điểm  $Q(-2; -2\sqrt{3})$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết độ dài  $AB = AC$  và điểm B có hoành độ lớn hơn 1.

**Lời giải tham khảo :**



Ta có  $AB = AC \Rightarrow$  tam giác ABC đều  $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = 30^\circ$

Đường thẳng BD có vtpt  $\vec{n}_1 = (1; -1)$ . Giả sử  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của AB

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}) = \frac{|a - b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 + 4ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{3}b$$

✓ Với  $a = -2 - \sqrt{3}b$  chọn  $\vec{n} = (-2 - \sqrt{3}; 1)$  đường thẳng AB đi qua điểm P và có vtpt  $\vec{n} \Rightarrow AB : 2 + \sqrt{3}x - y - 2 = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và BD  $\Rightarrow B\left(\frac{2}{1 + \sqrt{3}}; \frac{2}{1 + \sqrt{3}}\right)$  loại do  $x_B > 1$

✓ Với  $a = -2 + \sqrt{3}b$  chọn  $\vec{n} = (-2 + \sqrt{3}; 1)$  đường thẳng AB đi qua điểm P và có vtpt  $\vec{n} \Rightarrow AB : 2 - \sqrt{3}x - y - 2 + 2\sqrt{3} = 0$

Tọa độ điểm B là giao điểm của AB và BD  $\Rightarrow B(2; 2)$  thỏa mãn

Ta có  $CD \parallel AB$  và CD đi qua điểm Q  $\Rightarrow CD : 2 - \sqrt{3}x - y + 4 - 4\sqrt{3} = 0$

Tọa độ điểm D là giao điểm của BD và CD  $\Rightarrow D(-4; -4) \Rightarrow$  tọa độ tâm K của hình thoi là trung điểm của BD  $\Rightarrow K(-1; -1)$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Phương trình đường chéo  $AC$  đi qua điểm  $K$  và vuông góc với  $BD \Rightarrow AC : x + y + 2 = 0$

Tọa độ điểm  $A$  là giao điểm của  $AB$  và  $AC \Rightarrow A(....)$

Tọa độ điểm  $C$  là giao điểm của  $CD$  và  $AC \Rightarrow C(....)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 11 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  có  $A(5; 2)$  phương trình đường trung trực cạnh  $BC$  và trung tuyến xuất phát từ đỉnh  $C$  lần lượt là  $(d_1) : 2x + y - 5 = 0$ ;  $(d_2) : x + y - 6 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $B, C$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải tham khảo :**

Giả sử điểm  $B(a; b)$ . Ta có trung điểm của  $AB$  là  $M\left(\frac{a+5}{2}; \frac{b+2}{2}\right) \in (d_2)$

$$\Rightarrow \frac{a+5}{2} + \frac{b+2}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow a + b - 7 = 0 \Leftrightarrow b = 7 - a \Rightarrow B(a; 7 - a)$$

Lấy điểm  $C(c; 6 - c) \in (d_2)$

$(d_1)$  là trung trực của  $BC \Rightarrow$  trung điểm của  $BC$  là  $N\left(\frac{a+c}{2}; \frac{13-a-c}{2}\right) \in (d_1)$

$$\Rightarrow a + c + \frac{13-a-c}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow a + c + 3 = 0 \quad (1)$$

$(d_1)$  là trung trực của  $BC \Rightarrow BC \perp (d_1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$  ta có  $\overrightarrow{u_{d_1}} = (1; -2); \overrightarrow{BC} = (c - a; a - 1 - c)$

$$\Rightarrow c - a - 2(a - 1 - c) = 0 \Leftrightarrow 3c - 3a + 2 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có 
$$\begin{cases} c + a = -3 \\ 3c - 3a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{6} \\ c = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  tọa độ điểm  $B$  và  $C$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 12 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; -3)$ , trực tâm  $H(1; -1)$  và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $I(2; -2)$ . Xác định tọa độ các đỉnh  $B, C$  của tam giác  $ABC$ .

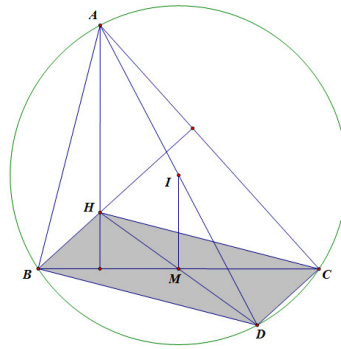
**Lời giải tham khảo :**

Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $I \Rightarrow AD$  là đường kính đường tròn tâm  $I$  và  $I$  là trung điểm của  $AD \Rightarrow D(5; -1)$

$AD$  là đường kính đường tròn tâm  $I \Rightarrow CD \perp AC$ ,  $H$  là trực tâm  $\Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow CD \parallel BH$

Tương tự ta có  $CH \parallel BD \Rightarrow BHCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow BC$  và  $DH$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG



$\Rightarrow$  trung điểm M của DH là trung điểm của BC ta có  $M(3; -1)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm M và vuông góc với AH  $\Rightarrow BC : x + y - 2 = 0$

Phương trình đường tròn tâm I có bán kính  $IA = \sqrt{10}$

$$\Rightarrow (C) : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$$

Tọa độ điểm B và C là giao điểm của đường thẳng BC và (C)

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 13 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường cao BH :  $x + 2y - 3 = 0$ , trung tuyến AM :  $3x + 3y - 8 = 0$ . Cạnh BC đi qua điểm  $N(3; -2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC biết đỉnh C thuộc đường thẳng (d) :  $x - y + 2 = 0$ .

**Lời giải tham khảo :**

Lấy điểm  $B(3 - 2b; b) \in BH$  và  $C(c; c + 2) \in (d)$

Gọi M là trung điểm của BC  $\Rightarrow M\left(\frac{3 - 2b + c}{2}; \frac{b + c + 2}{2}\right)$ . Ta có  $M \in AM$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{3 - 2b + c}{2} + 3 \cdot \frac{b + c + 2}{2} - 8 = 0 \Leftrightarrow 3b - 6c + 1 = 0 \quad (1)$$

Cạnh BC đi qua điểm  $N(3; -2) \Rightarrow \overrightarrow{BN}$  và  $\overrightarrow{NC}$  cùng phương

Ta có  $\overrightarrow{BN} = (2b; -2 - b)$  và  $\overrightarrow{NC} = (c - 3; c + 4)$

$$\Rightarrow \frac{c - 3}{2b} = \frac{c + 4}{-2 - b} \Leftrightarrow 3bc + 5b + 2c - 6 = 0 \quad (2)$$

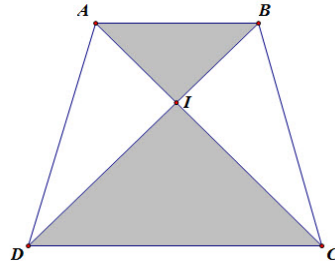
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow b = \dots; c = \dots \Rightarrow$  tọa độ điểm B và C.

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 14 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang cân ABCD với  $CD = 2AB$ , phương trình hai đường chéo AC và BD lần lượt là  $(d_1) : x + y - 4 = 0$ ;  $(d_2) : x - y - 2 = 0$ . Biết rằng tọa độ hai điểm A và B đều dương và diện tích hình thang bằng 36. Tìm tọa độ các đỉnh hình thang.

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Lời giải tham khảo :



Ta có  $(d_1) \perp (d_2) \Rightarrow$  hình thang cân  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 36 \Rightarrow AC^2 = 72 \Rightarrow AC = BD = 6\sqrt{2}$$

Ta có hai tam giác  $AIB$  và tam giác  $CID$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{IA}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IA = \frac{1}{3}AC = 2\sqrt{2} = IB$

$I$  là giao điểm của hai đường chéo  $\Rightarrow I(3; 1)$

$$\text{Lấy điểm } A(a; 4-a) \in (d_1) \Rightarrow IA^2 = (a-3)^2 + (a-3)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 3) & (tm) \\ A(5; -1) & (loai) \end{cases}$$

$$\text{Lấy điểm } B(b; b-2) \in (d_2) \Rightarrow IB^2 = (b-3)^2 + (b-3)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1; -1) & (loai) \\ B(5; 3) & (tm) \end{cases}$$

Lấy điểm  $C(c; 4-c) \in (d_1)$  ta có  $IC = 2IA \Rightarrow 2\vec{AI} = \vec{IC} \Rightarrow C(7; -3)$

Lấy điểm  $D(d; d-2) \in (d_2)$  ta có  $ID = 2IB \Rightarrow 2\vec{BI} = \vec{ID} \Rightarrow D(-1; -3)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 15 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật  $ABCD$  có điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $(d) : x + 3y + 7 = 0$  và  $A(1; 5)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên tia đối của tia  $CB$  sao cho  $MC = 2BC$ ,  $N$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  lên đường thẳng  $MD$ . Xác định tọa độ các đỉnh  $B$  và  $C$  biết rằng  $N\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải tham khảo :

Gọi điểm  $C(-3c-7; c) \in (d)$ . Gọi  $I$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$

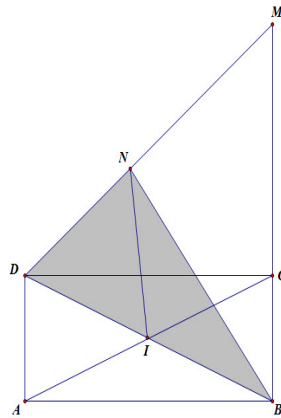
$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow I\left(\frac{-3c-6}{2}; \frac{c+5}{2}\right)$$

Xét tam giác  $DNB$  vuông tại  $N$  có  $I$  là trung điểm của  $BD \Rightarrow IN = IB = ID$

$I$  là tâm của hình chữ nhật  $\Rightarrow IA = IB = ID \Rightarrow IN = IA$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3c-6}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{c+5}{2} - 5\right)^2 = \left(\frac{-3c-6}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c = -3 \Rightarrow C(2; -3)$$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG



Giả sử  $B(a; b)$  có  $AB \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$  có  $\overrightarrow{AB} = (a-1; b-5); \overrightarrow{BC} = (a-2; b+3)$

$$\Rightarrow (a-1)(a-2) + (b-5)(b+3) = 0 \quad (1)$$

Ta có  $CM = 2BC \Rightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow M(6-2a; -9-2b)$

$$MN \perp BN \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BN} \text{ mà } \overrightarrow{BN} = \left(a + \frac{5}{2}; b - \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{MN} = \left(\frac{17}{2} - 2a; -\frac{19}{2} - 2b\right)$$

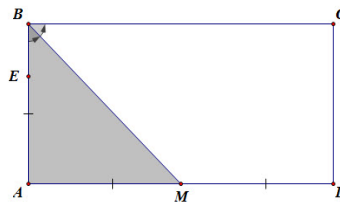
$$\Rightarrow \left(a + \frac{5}{2}\right) \left(\frac{17}{2} - 2a\right) + \left(b - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{19}{2} - 2b\right) = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow a = \dots; b = \dots \Rightarrow B(\dots)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 16 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật  $ABCD$ , biết phân giác trong góc  $\widehat{ABC}$  đi qua trung điểm M của cạnh  $AD$ , phương trình đường thẳng  $BM$  là  $(d) : x - y + 2 = 0$ , điểm  $D$  thuộc đường thẳng  $(d_1) : x + y - 9 = 0$ , điểm  $E(-1; 2)$  thuộc đường thẳng  $AB$  và điểm  $B$  có hoành độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật

**Lời giải tham khảo :**



Ta có  $BM$  là phân giác góc  $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABM} = 45^\circ \Rightarrow \Delta ABM$  vuông cân tại A

Gọi  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng  $AB$ , có  $\vec{n}_1 = (1; -1)$  là vtpt của  $BM$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{n}_1) = \frac{|a-b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

✓ Với  $a = 0$  chọn  $\vec{n} = (0; 1) \Rightarrow$  phương trình đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $E$  và có vtpt  $\vec{n} \Rightarrow AB : y - 2 = 0 \Rightarrow$  Tọa độ  $B$  là giao điểm của  $AB$  và  $BM \Rightarrow B(0; 2)$  ( loại)

✓ Với  $b = 0$  chọn  $\vec{n} = (1; 0) \Rightarrow$  phương trình đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $E$  và có vtpt  $\vec{n} \Rightarrow AB : x + 1 = 0 \Rightarrow$  Tọa độ  $B$  là giao điểm của  $AB$  và  $BM \Rightarrow B(-1; 1)$  ( thỏa mãn)

Giả sử điểm  $A(-1; a) \in AB$  và  $D(d; 9 - d) \in (d_1)$

Trung điểm  $M$  của  $AD$  có tọa độ  $M\left(\frac{d-1}{2}; \frac{9-d+a}{2}\right) \in (d)$

$$\Rightarrow \frac{d-1}{2} - \frac{9-d+a}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2d - a - 6 = 0 \quad (1)$$

Ta có  $AD \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$  mà  $\overrightarrow{AB} = (0; 1)$  và  $\overrightarrow{AD} = (d+1; 9-d-a)$

$$\Rightarrow 9 - d - a = 0 \Leftrightarrow a + d = 9 \quad (2)$$

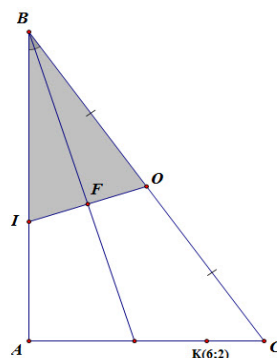
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1; 4) \\ D(5; 4) \end{cases}$$

Gọi  $I$  là tâm hình chữ nhật  $\Rightarrow I\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .  $I$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow C(5; 1)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 17 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , biết  $B$  và  $C$  đối xứng nhau qua gốc tọa độ  $O$ . Đường phân giác trong góc  $B$  có phương trình  $(d) : x + 2y - 5 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$  biết đường thẳng  $AC$  đi qua điểm  $K(6; 2)$ .

**Lời giải tham khảo :**



Gọi điểm  $B(5 - 2b; b) \in (d)$ .  $B$  và  $C$  đối xứng nhau qua gốc tọa độ  $O \Rightarrow C(2b - 5; -b)$

Qua  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $(d)$  cắt  $(d)$  và  $AB$  lần lượt tại  $F$  và  $I$ .

Đường thẳng  $OF$  đi qua  $O$  và vuông góc với  $(d) \Rightarrow OF : 2x - y = 0$

Tọa độ  $F$  là giao điểm của  $(d)$  và  $OF \Rightarrow F(1; 2)$

$F$  là trung điểm của  $OI \Rightarrow I(2; 4)$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  có  $\overrightarrow{AB} = (3 - 2b; b - 4)$  và  $\overrightarrow{AC} = (2b - 11; -b - 2)$   
 $\Rightarrow (3 - 2b)(2b - 11) + (b - 4)(-b - 2) = 0 \Leftrightarrow -5b^2 + 30b - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 5 \end{cases}$  Với  $b = 1 \Rightarrow B(3; 1) \Rightarrow C(-3; -1)$

Phương trình đường thẳng  $AB$  đi qua  $B$  và  $I \Rightarrow AB: 3x + y - 10 = 0$

Phương trình đường thẳng  $AC$  đi qua  $C$  và  $K \Rightarrow AC: x - 3y = 0$

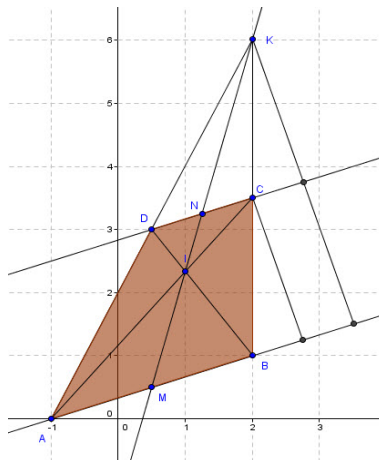
$A$  là giao điểm của  $AB$  và  $AC \Rightarrow A(3; 1)$  ( loại do trùng điểm  $B$ )

Trường hợp  $b = 5$  xét tương tự

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 18 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD có diện tích bằng  $\frac{45}{8}$ . Phương trình hai cạnh đáy  $AB: x - 3y + 1 = 0$  và  $CD: 2x - 6y + 17 = 0$ . AD và BC cắt nhau tại điểm  $K(2; 6)$ . Hai đường chéo cắt nhau tại điểm  $I\left(1; \frac{7}{3}\right)$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

**Lời giải tham khảo :**



Khoảng cách giữa  $AB$  và  $CD$  là  $d = \frac{15}{\sqrt{40}}$

Ta có diện tích hình thang  $S = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot d \Rightarrow AB + CD = \frac{3\sqrt{10}}{2}$  (1)

ABCD là hình thang  $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{d(I, AB)}{d(I, CD)} = 2$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AB = 2 \cdot CD = \sqrt{10}$

Tam giác KAB có  $CD \parallel AB$  và  $AB = 2CD \Rightarrow CD$  là đường trung bình của tam giác KAB

Nối KI cắt  $AB$  và  $CD$  tại M và N  $\Rightarrow M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Phương trình đường thẳng KI đi qua K và I  $\Rightarrow KI : 11x - 3y - 4 = 0$

M là giao điểm của KI và AB  $\Rightarrow M \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$

Ta có  $AB = \sqrt{10}$  và M là trung điểm của AB  $\Rightarrow A$  và B thuộc đường tròn tâm M bán kính  $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\Rightarrow (C) : \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{5}{2}$$

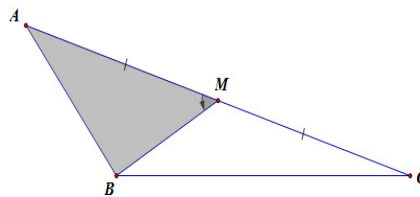
A, B là giao điểm của (C) và đường thẳng AB  $\Rightarrow A, B$  có tọa độ là  $(2; 1); (-1; 0)$

Do đó C, D có tọa độ là  $\left( 2; \frac{7}{2} \right); \left( \frac{1}{2}; 3 \right)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 19 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có  $BC = 2AB$ , phương trình đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh B là  $(d) : x + y - 2 = 0$ . Biết  $\widehat{ABC} = 120^\circ$  và điểm A  $(3; 1)$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác.

**Lời giải tham khảo :**



Đặt  $AB = x \Rightarrow BC = 2x$ . Áp dụng định lý Cosin vào tam giác ABC ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 7x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{7}$$

Áp dụng công thức tính đường trung tuyến vào tam giác ABC ta được

$$BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

Trong tam giác ABM có  $AB = x, BM^2 = \frac{3x^2}{4}; AM = \frac{x\sqrt{7}}{2} \Rightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2$

$\Rightarrow \triangle ABM$  vuông tại B  $\Rightarrow AB \perp BM$

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với BM  $\Rightarrow AB : x - y - 2 = 0$

B là giao điểm của AB và BM  $\Rightarrow B(2; 0)$

Lại có  $AB = d(A, BM) = \sqrt{2} = x \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Gọi  $M(m; 2 - m) \in BM$

$$\Rightarrow BM^2 = 2(m - 2)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$



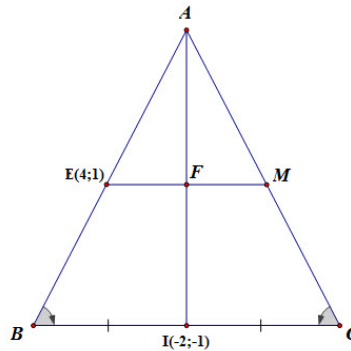
## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Thay vào ta được điểm  $M$ , lại có  $M$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow$  tọa độ điểm  $C \ 2 \pm \sqrt{3}; 4 \pm \sqrt{3}$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 20 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , phương trình cạnh  $BC$  là  $(d) : 2x - y + 3 = 0$ . Điểm  $I(-2; -1)$  là trung điểm cạnh  $BC$ , điểm  $E(4; 1)$  nằm trên cạnh  $AB$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng 90.

**Lời giải tham khảo :**



Tam giác  $ABC$  cân tại  $A \Rightarrow AI$  là vừa là đường cao vừa là đường phân giác góc  $A$

Phương trình đường phân giác  $AI$  đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC \Rightarrow AI : x + 2y + 4 = 0$

Qua  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AI$  cắt  $AI$  và  $AC$  tại  $F$  và  $M$ .

Phương trình đường thẳng  $EM$  đi qua  $E$  vuông góc với  $AI \Rightarrow EM : 2x - y - 7 = 0$

Tọa độ điểm  $F$  là giao điểm của  $EM$  và  $AI \Rightarrow F(2; -3)$ .  $F$  là trung điểm của  $EM \Rightarrow M(0; 7)$

Lấy điểm  $B(b; 2b + 3) \in BC \Rightarrow C(-4 - b; 5 - 2b)$

Tam giác  $ABC$  cân tại  $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$  hay  $(BE, BC) = (MC, BC)$

$\overrightarrow{BE} = (b - 4; 2b - 2), \overrightarrow{MC} = (4 + b; 2b - 2), \overrightarrow{BC} = (1; 2)$

$$\Rightarrow \frac{|b - 4 + 2b - 4|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5b^2 - 16b + 20}} = \frac{|5b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5b^2 + 20}} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

✓ Với  $b = 1 \Rightarrow B(1; 5) \Rightarrow C(-5; -7) \Rightarrow BC = 6\sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot BC = 90 \Rightarrow AI = 6\sqrt{5}$ . Lấy điểm  $A(-2a - 4; a) \in AI$

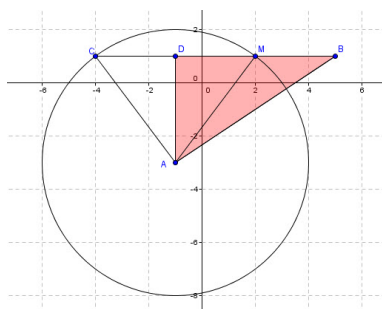
$$\Rightarrow AI^2 = (2a + 2)^2 + (a + 1)^2 = 90 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-14; 5) \\ A(10; -7) \end{cases}$$

✓ Với  $b = 4$  xét tương tự.

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 21 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  có điểm  $A(-1; -3)$ ,  $B(5; 1)$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  biết rằng  $MA = AC = 5$  và đường thẳng  $BC$  có hệ số góc là một số nguyên.

**Lời giải tham khảo :**



Giả sử điểm  $M(a; b)$  ta có  $MA = 5 \Rightarrow (a + 1)^2 + (b + 3)^2 = 25$

$$a^2 + 2a + b^2 + 6b = 15 \quad (1)$$

Gọi  $D$  là trung điểm của  $CM$  ta có  $MA = AC = 5 \Rightarrow \triangle CAM$  cân tại  $A \Rightarrow AD \perp CM$

Theo giả thiết  $MC = 2MB \Rightarrow MB = MD \Rightarrow M$  là trung điểm của  $BD \Rightarrow D(2a - 5; 2b - 1)$

$$\vec{AD} = (2a - 4; 2b + 2); \vec{BI} = (2a - 10; 2a - 2)$$

$$AD \perp BI \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BI} = 0 \Rightarrow (2a - 4)(2a - 10) + (2b + 2)(2b - 2) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 7a + b^2 = -9 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = 2; b = 1 \\ a = \frac{50}{13}; b = -\frac{23}{13} \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Với } a = \frac{50}{13}; b = -\frac{23}{13} \Rightarrow M\left(\frac{50}{13}; -\frac{23}{13}\right)$$

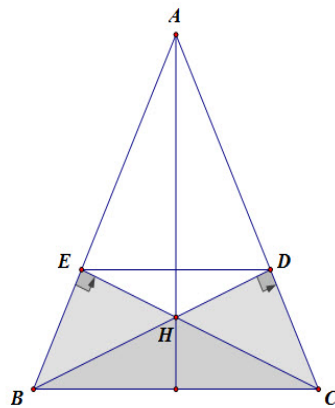
Phương trình đường thẳng  $BC$  đi qua  $B$  và  $M \Rightarrow BC : 12x - 5y - 55 = 0$  ( loại do phương trình  $BC$  có hệ số góc nguyên)

$$\checkmark \text{ Với } a = 2; b = 1 \Rightarrow M(2; 1) \text{ phương trình } BC \text{ đi qua } M \text{ và } B \Rightarrow BC : y = 1 \text{ ( thỏa mãn)}$$

$$\text{Tọa độ điểm } D(-1; 1) \Rightarrow C(-4; 1)$$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 22 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , có trực tâm  $H(-3; 2)$ . Gọi  $D, E$  là chân đường cao hạ từ  $B$  và  $C$ . Điểm  $A$  thuộc đường thẳng  $(d) : x - 3y - 3 = 0$ , điểm  $F(-2; 3)$  thuộc đường thẳng  $DE$  và  $HD = 2$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A$ .



**Lời giải tham khảo :**

Ta có  $HD = 2 \Rightarrow (x_D + 3)^2 + (y_D - 2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x_D^2 + y_D^2 + 6x_D - 4y_D + 9 = 0 \quad (1)$$

Điểm  $A \in (d) \Rightarrow A(3a + 3; a)$  ta có  $AD \perp DH \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$

$$(x_D - 3a - 3)(x_D + 3) + (y_D - a)(y_D - 2) = 0$$

$$x_D^2 + y_D^2 - 3ax_D - (a + 2)y_D - 7a - 9 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (6 + 3a)x_D + (a - 2)y_D + 7a + 18 = 0$$

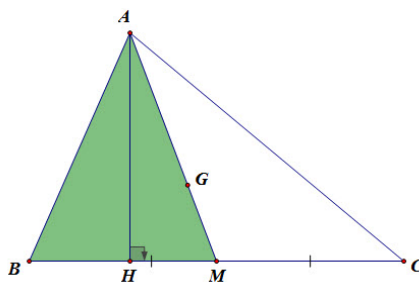
$$\text{Tương tự ta có } (6 + 3a)x_E + (a - 2)y_E + 7a + 18 = 0$$

$$\text{Do đó phương trình đường thẳng } DE \text{ có dạng } (d_1) : (6 + 3a)x + (a - 2)y + 7a + 18 = 0$$

$$\text{Mà điểm } F \in (d_1) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow A(3; 0)$$

**Đề bài 23 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(1; 1)$ , đường cao từ đỉnh  $A$  có phương trình  $(d) : 2x - y + 1 = 0$ . Các đỉnh  $B$  và  $C$  thuộc đường thẳng  $(d_1) : x + 2y - 1 = 0$ . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết tam giác  $ABC$  có diện tích bằng 6.

**Lời giải tham khảo :**



$$\text{Điểm } A \in (d) \Rightarrow A(a; 2a + 1)$$

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow G \in AM$  và  $AG = 2GM \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$

$\Rightarrow M\left(\frac{3-a}{2}; 1-a\right)$  mặt khác  $M \in (d_1)$

$\Rightarrow \frac{3-a}{2} + 2(1-a) - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A(1; 3) \Rightarrow M(1; 0)$

Gọi  $H$  là giao điểm của  $(d)$  và  $(d_1) \Rightarrow H\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow AH = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 6 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} \Rightarrow MB = MC = \sqrt{5}$

Điểm  $B \in (d_1) \Rightarrow B(1-2b; b) \Rightarrow MB^2 = 5b^2 = 5 \Leftrightarrow b = \pm 1$

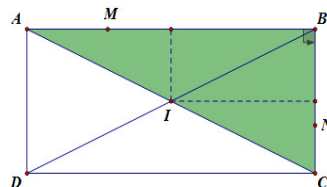
✓  $b = 1 \Rightarrow B(-1; 1) \Rightarrow C(3; -1)$

✓  $b = -1 \Rightarrow B(3; -1) \Rightarrow C(-1; 1)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 24 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích bằng 6. Phương trình đường thẳng chứa đường chéo  $BD$  là  $(d) : 2x + y - 11 = 0$ , đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $M(4; 2)$ , đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $N(8; 4)$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết các điểm  $B, D$  đều có hoành độ lớn hơn 4.

**Lời giải tham khảo :**



Vì  $B \in (d) \Rightarrow B(b; 11-2b)$ .  $AB \perp BC \Rightarrow MB \perp NB \Rightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$

$\Rightarrow (b-4)(b-8) + (9-2b)(7-2b) = 0 \Rightarrow 5b^2 - 44b + 95 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{19}{5} \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow B(5; 1)$

Phương trình đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $B$  và  $M \Rightarrow AB : x + y - 6 = 0$

Phương trình đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $B$  và  $N \Rightarrow AC : x - y - 4 = 0$

$A \in AB \Rightarrow A(a; 6-a)$  và  $C \in BC \Rightarrow C(c; c-4)$

Gọi  $I$  là tâm của hình chữ nhật  $\Rightarrow I\left(\frac{a+c}{2}; \frac{c-a+2}{2}\right) \in BD$

$\Rightarrow a + c + \frac{c-a+2}{2} - 11 = 0 \Leftrightarrow 3c + a - 20 = 0 \quad (1)$

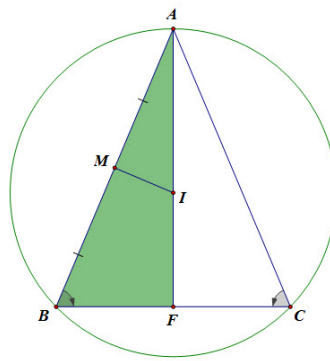
$AB = \sqrt{2} \cdot |a-5|$  và  $BC = \sqrt{2} \cdot |c-5| \Rightarrow S = 2|a-5| \cdot |c-5| = 6 \quad (2)$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = 2; c = 6 \\ a = 8; c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; 4), C(6; 2) \Rightarrow I(4; 3) \Rightarrow D(3; 5) & (\text{loại}) \\ A(8; -2), C(4; 0) \Rightarrow I(6; -1) \Rightarrow D(7; -3) & (\text{tm}) \end{cases}$$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 25 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$  biết điểm  $M(0; 1)$  là trung điểm của cạnh  $AB$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

**Lời giải tham khảo :**



Tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $I(-1; 2); R = 2$ .  $M$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow IM \perp AB$

Phương trình đường thẳng  $AB$  đi qua  $M$  và vuông góc với  $IM \Rightarrow AB : x - y + 1 = 0$

Có điểm  $A \in AB \Rightarrow A(a; a+1) \Rightarrow IA = 2 \Rightarrow (a+1)^2 + (a-1)^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow A(1; 2) \Rightarrow B(-1; 0)$

Phương trình đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $B$  và vuông góc với  $AI \Rightarrow BC : x + 1 = 0$

$C$  là giao điểm của  $BC$  và  $(C) \Rightarrow C(-1; 4)$

Bài toán giải quyết xong.

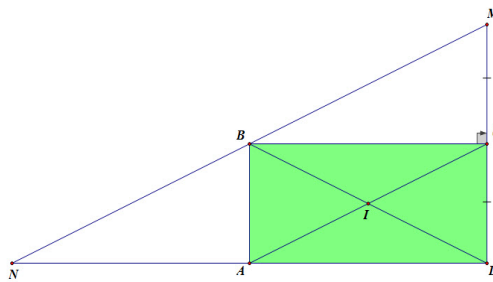
**Đề bài 26 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích bằng 10, phương trình đường thẳng chứa cạnh  $AD$  là  $(d) : 3x - y = 0$ . Lấy điểm  $M$  đối xứng với điểm  $D$  qua điểm  $C$  và đường thẳng  $BM$  có phương trình  $(d_1) : 2x + y - 10 = 0$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đỉnh  $B$  có hoành độ dương.

**Lời giải tham khảo :**

Gọi  $N$  là giao điểm của  $BM$  và  $AD \Rightarrow N(2; 6)$

Điểm  $D \in AD \Rightarrow D(d; 3d)$  và  $B \in BM \Rightarrow B(b; 10 - 2b)$  với  $b > 0$

$A$  là trung điểm của  $ND \Rightarrow A\left(\frac{d+2}{2}; \frac{3d+6}{2}\right)$



$B$  là trung điểm của  $MN \Rightarrow M(2b-2; 14-4b)$  mà  $C$  là trung điểm của  $MD \Rightarrow C\left(\frac{2b-2+d}{2}; \frac{14-4b+3d}{2}\right)$

$$\begin{aligned} AB \perp AD &\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ có } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{d+2-2b}{2}; \frac{3d+4b-14}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{d+2-2b}{2} + 3 \cdot \frac{3d-14+4b}{2} = 0 \Leftrightarrow b+d=4 \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) có  $AD^2 = AN^2 = \frac{10}{4} \cdot (d-2)^2$  và  $AB^2 = \frac{10}{4} (d-2)^2$

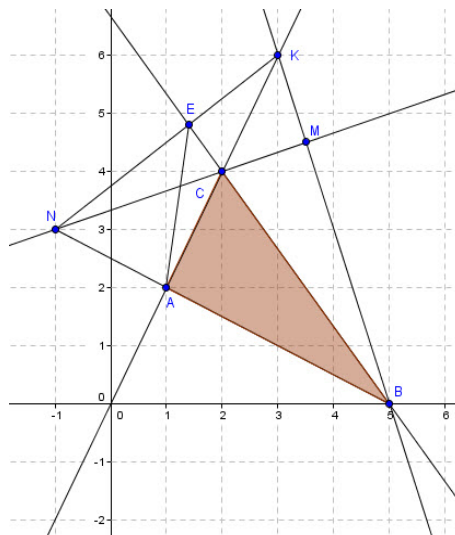
$$\Rightarrow S = \frac{10}{4} (d-2)^2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} d=0 \Rightarrow b=4 & (tm) \\ d=4 \Rightarrow b=0 & (loại) \end{cases}$$

Do đó  $B(4;2), D(0;0), C(3;-1), A(1;3)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 27 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $K$  sao cho  $AC = CK$ . Kẻ  $KE$  vuông góc với  $BC$  ( $E$  thuộc đường thẳng  $BC$ ) cắt đường thẳng  $AB$  tại  $N(-1;3)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$  biết  $\widehat{AEB} = 45^\circ$ , phương trình đường thẳng  $BK$  là  $(d): 3x + y - 15 = 0$  và hoành độ điểm  $B$  lớn hơn 3.

**Lời giải tham khảo :**



Tam giác  $NBK$  có  $BE$  và  $KA$  là hai đường cao  $\Rightarrow C$  là trực tâm  $\Rightarrow NC \perp BK$ .

Tứ giác  $BAEK$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{AKB} = 45^\circ \Rightarrow \Delta ABK$  vuông cân tại  $A \Rightarrow \widehat{ABK} = 45^\circ$

Gọi  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng  $AB$ , có  $\vec{n}_1 = (3; 1)$  là vtpt của đường thẳng  $BK$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{n}_1) = \frac{|3a + b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4a^2 + 6ab - 4b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = -2b \end{cases}$$

✓ Với  $a = -2b \Rightarrow$  chọn  $\vec{n} = (-2; 1) \Rightarrow AB: -2x + y - 5 = 0 \Rightarrow B(2; 9)$  (loại)

✓ Với  $b = 2a \Rightarrow$  chọn  $\vec{n} = (1; 2) \Rightarrow AB: x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow B(5; 0)$  (thỏa mãn)

Phương trình đường thẳng  $NM$  qua điểm  $N$  và vuông góc với  $BK \Rightarrow MN: x - 3y + 10 = 0$

$$\text{Có } \Delta ABK \text{ và } \Delta KCM \text{ vuông cân} \Rightarrow KM = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot CK = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot BK = \frac{BK}{4}$$

$M$  là giao điểm của  $MN$  và  $BK \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$ . Có  $BK = 4MK \Rightarrow K(3; 6)$

Phương trình đường thẳng  $AC$  đi qua  $K$  và vuông góc với  $AB \Rightarrow AC: 2x - y = 0$

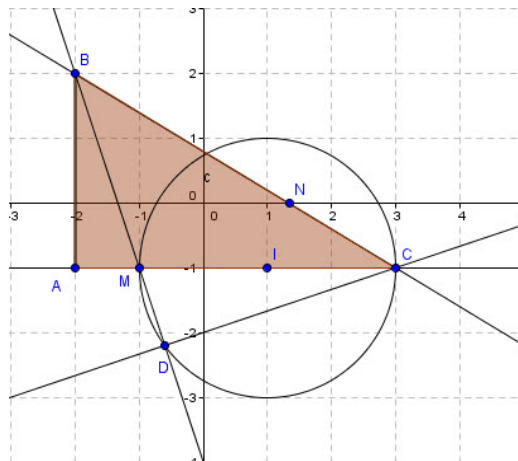
$A$  là giao điểm của  $AC$  và  $AB \Rightarrow A(1; 2)$

$C$  là trung điểm của  $AK \Rightarrow C(2; 4)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 28 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $AB = 3AM$ . Đường tròn tâm  $I(1; -1)$  đường kính  $CM$  cắt  $BM$  tại  $D$ . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$  biết đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $N\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ , phương trình đường thẳng  $CD: x - 3y - 6 = 0$  và điểm  $C$  có hoành độ dương.

**Lời giải tham khảo :**



Tam giác  $ABM$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3AM \Rightarrow BM = \sqrt{10}AM \Rightarrow \cos \widehat{ABM} = \frac{3}{\sqrt{10}}$





Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với  $(d_2)$  cắt  $(d_2)$  tại G và cắt AB tại H  $\Rightarrow CH : x - 5y + 2 = 0$

G là giao điểm của CH và  $(d_2) \Rightarrow G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . G là trung điểm của CD  $\Rightarrow H(3; 1)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua H và song song với CD  $\Rightarrow AB : 3x - 2y - 7 = 0$

A là giao điểm của AB và  $(d_2) \Rightarrow A(1; -2)$ .

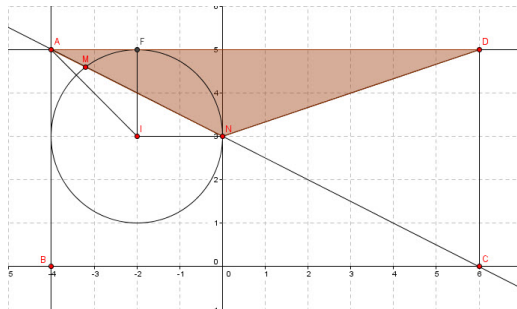
Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm C và song song với AD  $\Rightarrow BC : 4x - 7y + 8 = 0$

B là giao điểm của AB và BC  $\Rightarrow B(5; 4)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 30 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB và AD tiếp xúc với đường tròn  $(C) : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ . Đường chéo AC cắt  $(C)$  tại điểm  $M\left(-\frac{16}{5}; \frac{23}{5}\right)$  và điểm N thuộc trục Oy. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết điểm A có hoành độ âm và điểm D có hoành độ dương, diện tích tam giác AND bằng 10

**Lời giải tham khảo :**



Đường tròn  $(C)$  cắt trục Oy tại điểm  $N(0; 3) \Rightarrow MN = \frac{8\sqrt{5}}{5}$  và phương trình MN :  $x + 2y - 6 = 0$

Giả sử đường tròn  $(C)$  tiếp xúc với AB, AD tại điểm G và F  $\Rightarrow AGIF$  là hình vuông  $\Rightarrow AF = IF = 2$ .

AMN là cát tuyến của  $(C)$  và AF là tiếp tuyến của  $(C) \Rightarrow AM \cdot AN = AF^2 = 4$

Vì  $A \in MN \Rightarrow A(6 - 2a; a)$  và  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 4$  (A nằm ngoài M và N)

$$\Rightarrow \left(-\frac{16}{5} - 6 + 2a\right)(2a - 6) + \left(\frac{23}{5} - a\right)(3 - a) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{4}{5}; \frac{13}{5}\right) \\ A(-4; 5) \end{cases} \Rightarrow A(-4; 5)$$

Giả sử điểm  $D(b; c)$ . Gọi d là khoảng cách từ D đến AN ta có

$$S_{AND} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AN = 10 \Rightarrow d = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|b + 2c - 6|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |b + 2c - 6| = 10 \quad (1)$$

Ta có góc giữa AD và AI bằng  $45^\circ$ .  $\overrightarrow{AD} = (b + 4; c - 5)$ ,  $\overrightarrow{AI} = (1; -1)$

$$\cos(\vec{AD}, \vec{AI}) = \frac{|b+4-c+5|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(b+4)^2 + (c-5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\text{Với } c = 5 \text{ thay vào (1)} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -14 \end{cases} \quad D \text{ có hoành độ dương} \Rightarrow D(6; 5)$$

Phương trình AD đi qua điểm A và D  $\Rightarrow AD : y = 5$ . Phương trình CD đi qua D và vuông góc với AD  $\Rightarrow CD : x = 6$

C là giao điểm của AC và CD  $\Rightarrow C(6; 0)$ . Gọi I là tâm hình chữ nhật  $\Rightarrow I\left(1; \frac{5}{2}\right)$

I là trung điểm của BD  $\Rightarrow B(-4; 0)$

**Đề bài 31 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm M(2; 1) là trung điểm của AC. Điểm H(0; -3) là chân đường cao hạ từ A, điểm E(23; -2) thuộc trung tuyến kẻ từ C. Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh A thuộc đường thẳng (d) :  $2x + 3y - 5 = 0$  và điểm C có hoành độ dương.

**Lời giải tham khảo :**

Vì  $A \in (d) \Rightarrow A(3a+1; 1-2a)$ . M là trung điểm của AC  $\Rightarrow C(3-3a; 1+2a)$

H là chân đường cao hạ từ A  $\Rightarrow AH \perp CH \Rightarrow \vec{AH} \perp \vec{CH}$

$$\Rightarrow (3a+1)(3-3a) + (4-2a)(4+2a) = 0 \Rightarrow -13a^2 + 6a + 19 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{19}{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(6; -1) \\ C\left(-\frac{18}{13}; \frac{51}{13}\right) \end{cases} \Rightarrow C(6; -1) \Rightarrow A(-2; 3)$$

Phương trình đường trung tuyến kẻ từ C đi qua C và E  $\Rightarrow CE : x + 17y + 11 = 0$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và H  $\Rightarrow BC : x - 3y - 9 = 0$

Lấy điểm  $B \in BC \Rightarrow B(3b+9; b)$

Trung điểm của AB là điểm N  $\left(\frac{3b+7}{2}; \frac{b+3}{2}\right)$

$$N \in CE \Rightarrow \frac{3b+7}{2} + 11 \cdot \frac{b+3}{2} + 11 = 0 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow B(-3; -4)$$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 32 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi  $ABCD$  có phương trình đường chéo  $AC$  là  $(d) : x + 7y - 31 = 0$ . Các đỉnh  $B, D$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $(d_1) : x + y - 8 = 0$ ;  $(d_2) : x - 2y + 3 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết hình thoi có diện tích bằng 75 và đỉnh  $A$  có hoành độ âm.

**Lời giải tham khảo :**

$$B \in (d_1) \Rightarrow B(b; 8 - b) \text{ và } D \in (d_2) \Rightarrow D(2d - 3; d)$$

$$ABCD \text{ là hình thoi} \Rightarrow \text{trung điểm của } BD \in AC. \text{ Gọi } I \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow I\left(\frac{b + 2d - 3}{2}; \frac{8 - b + d}{2}\right)$$

$$I \in AC \Rightarrow \frac{b + 2d - 3}{2} + 7 \cdot \frac{8 - b + d}{2} - 31 = 0 \Rightarrow 2b - 3d + 3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } BD \perp AC \Rightarrow 7(2d - 3 - b) - (d - 8 + b) = 0 \Rightarrow -8b + 13d - 13 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 8) \\ D(-1; 1) \end{cases} \Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 75 \Rightarrow AC = 15\sqrt{2}. \text{ Tam của hình thoi là } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

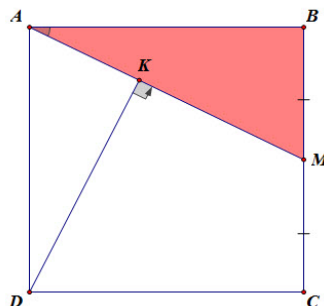
$$A \in AC \Rightarrow A(31 - 7a; a). \text{ Có } IA = \frac{AC}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow IA^2 = \dots \Rightarrow \text{tọa độ điểm } A \Rightarrow \text{tọa độ điểm } C$$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 33 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông  $ABCD$  có  $A(1; 1)$  và  $AB = 4$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $K\left(\frac{9}{5}; -\frac{3}{5}\right)$  là hình chiếu của  $D$  lên  $AM$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông biết đỉnh  $B$  có hoành độ nhỏ hơn 2.

**Lời giải tham khảo :**



$$\text{Phương trình đường thẳng } AM \text{ đi qua } A \text{ và } K \Rightarrow AM : 2x + y - 3 = 0$$

Ta có  $AK = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  và  $AM = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{2}{5}$

Lấy điểm  $M(m; 3 - 2m)$ . Ta có  $\frac{AK}{AM} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM} \Rightarrow M(3; -3)$

Giả sử điểm  $B(a; b)$  với  $a > 2$ . ABCD là hình vuông nên  $AB \perp BM$

$$\Rightarrow (a - 1)(a - 3) + (b - 1)(b + 3) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + b^2 + 2b = 0 \quad (1)$$

$$AB = 4 \Rightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 - 2b = 14 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow B(1; -3)$ . M là trung điểm của BC  $\Rightarrow C(5; -3)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB  $\Rightarrow AD : y = 1$

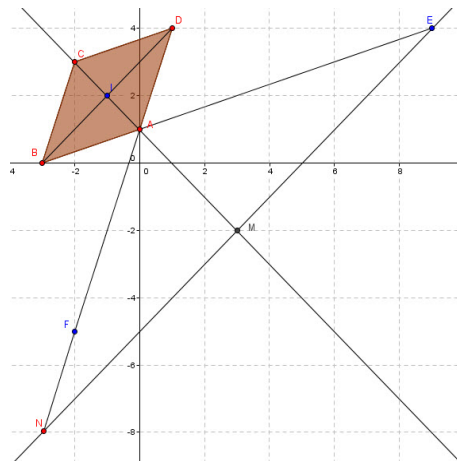
Phương trình đường thẳng CD đi qua C và vuông góc với BC  $\Rightarrow CD : x = 5$

D là giao điểm của CD và AD  $\Rightarrow D(5; 1)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 34 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có đường chéo AC nằm trên đường thẳng  $(d) : x + y - 1 = 0$ . Điểm  $E(9; 4)$  nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB, điểm  $F(-2; -5)$  nằm trên đường thẳng chứa cạnh AD,  $AC = 2\sqrt{2}$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi biết điểm C có hoành độ âm.

**Lời giải tham khảo :**



Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC cắt AC tại M và cắt AD tại N

Phương trình đường thẳng EN đi qua E và vuông góc với AC  $\Rightarrow EN : x - y - 5 = 0$

AC cắt EN tại điểm M  $\Rightarrow M(3; -2)$ . M là trung điểm của EN  $\Rightarrow N(-3; -8)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua F và N  $\Rightarrow AD : 3x - y + 1 = 0$

A là giao điểm của AC và AD  $\Rightarrow A(0; 1)$

Lấy điểm  $C(c; 1 - c) \in AC \Rightarrow AC^2 = c^2 + c^2 = 8 \Rightarrow c = \pm 2 \Rightarrow C(-2; 3)$

Gọi I là tâm của hình thoi  $\Rightarrow I$  là trung điểm của AC  $\Rightarrow I(-1; 2)$

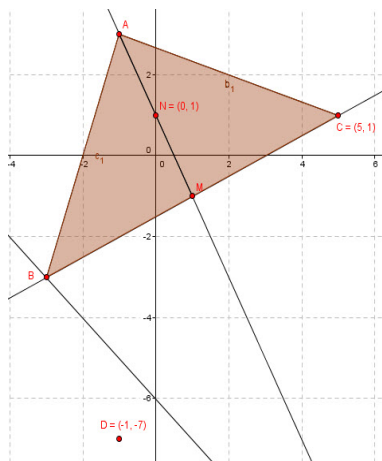
Phương trình đường chéo BD đi qua điểm I và vuông góc với AC  $\Rightarrow BD : x - y + 3 = 0$

D là giao điểm của AD và BD  $\Rightarrow D(1; 4)$ . I là trung điểm của BD  $\Rightarrow B(-3; 0)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 35 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm C (5; 1), trung tuyến AM, điểm B thuộc đường thẳng (d) :  $x + y + 6 = 0$ . Điểm N (0; 1) là trung điểm của AM, điểm D (-1; -7) không nằm trên đường thẳng AM và khác phía so với đường thẳng BC đồng thời khoảng cách từ A và D tới đường thẳng BC bằng nhau. Xác định tọa độ điểm A và B.

**Lời giải tham khảo :**



Giả sử  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng BC  $\Rightarrow BC : ax + by - 5a - b = 0$

Ta có  $d(A, BC) = d(D, BC) = 2d(N, BC) \Rightarrow \frac{|-6a - 8b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2|5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Rightarrow 16a^2 - 24ab - 16b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ a = 2b \end{cases}$$

✓ Với  $a = 2b \Rightarrow BC : 2x + y - 11 = 0$  ( loại do N và D cùng phía với BC)

✓ Với  $a = -\frac{1}{2}b \Rightarrow BC : x - 2y - 3 = 0$  ( thỏa mãn )

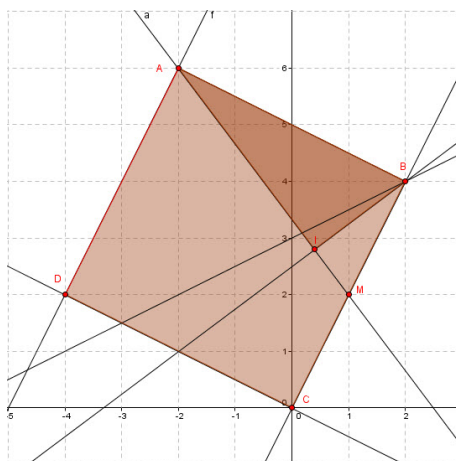
B là giao điểm của đường thẳng BC và (d)  $\Rightarrow B(-3; -3)$

M là trung điểm của BC  $\Rightarrow M(1; -1)$ . N là trung điểm của AM  $\Rightarrow A(1; 3)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 36 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có A (-2; 6), đỉnh B nằm trên đường thẳng (d) :  $x - 2y + 6 = 0$ . Trên hai cạnh BC và CD lấy hai điểm M và N sao cho  $BM = CN$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông biết AM và BN cắt nhau tại điểm  $I \left( \frac{2}{5}; \frac{14}{5} \right)$ .

**Lời giải tham khảo :**



Ta có  $\triangle ABM = \triangle BCN \Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BNC} \Rightarrow \widehat{BMA} + \widehat{CBN} = 90^\circ \Rightarrow BN \perp AM$

Phương trình đường thẳng AI đi qua A và I  $\Rightarrow AI : 4x + 3y - 10 = 0$

Phương trình đường thẳng BN đi qua I và vuông góc với AI  $\Rightarrow BI : 3x - 4y + 10 = 0$

B là giao điểm của đường thẳng (d) và BI  $\Rightarrow B(2; 4)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB  $\Rightarrow BC : 2x - y = 0$

M là giao điểm của BC và AI  $\Rightarrow M(1; 2)$

Ta có  $AB = 2\sqrt{5}, BM = \sqrt{5} \Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow M$  là trung điểm của BC

$\Rightarrow$  tọa độ điểm C (0; 0)

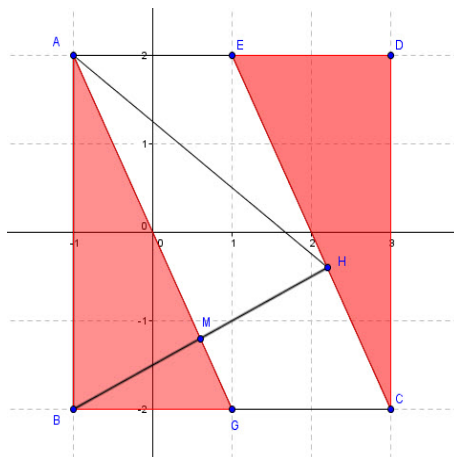
Giả sử H là tâm hình vuông  $\Rightarrow H$  là trung điểm của AC  $\Rightarrow H(-1; 3)$

H là trung điểm của BD  $\Rightarrow D(-4; 2)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 37 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AD, điểm  $H \left( \frac{11}{5}; -\frac{2}{5} \right)$  là hình chiếu của B lên CE và  $M \left( \frac{3}{5}; -\frac{6}{5} \right)$  là trung điểm của BH. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A có hoành độ âm.

**Lời giải tham khảo :**



Gọi G là trung điểm của BC  $\Rightarrow$  GM là đường trung bình của tam giác BCH  $\Rightarrow$  GM // CE

ABCD là hình vuông có E, G lần lượt là trung điểm của AD và BC  $\Rightarrow$  AG // CE

Qua G có hai đường thẳng cùng song song với CE do đó A, G, M thẳng hàng hay  $AM \perp BH$

$\Rightarrow$  phương trình đường thẳng AM :  $2x + y = 0$ , phương trình đường thẳng CE :  $2x + y - 4 = 0$

M là trung điểm của BH  $\Rightarrow B(-1; -2)$

Hai tam giác ABM và CED đồng dạng  $\Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{ED}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = 2BM$

Có  $BM = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ . Tam giác ABM vuông tại M có  $AM = 2BM = \frac{8\sqrt{5}}{5} \Rightarrow AB = 4$

Lấy điểm  $A(a; -2a) \in AM \Rightarrow AB = (a+1)^2 + (2-2a)^2 = 16 \Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{11}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow A(-1; 2) \Rightarrow$  phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB  $\Rightarrow AD : y = 2$

E là giao điểm của AD và CE  $\Rightarrow E(1; 2)$ , E là trung điểm của AD  $\Rightarrow D(3; 2)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và song song với AD  $\Rightarrow BC : y = -2$

C là giao điểm của CE và BC  $\Rightarrow C(3; -2)$

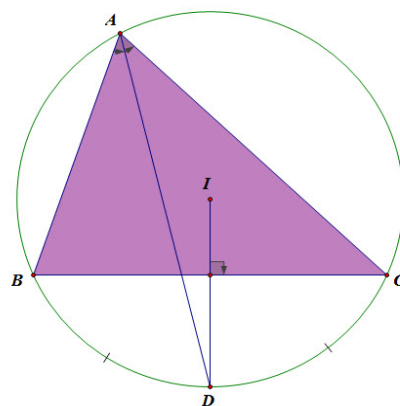
Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 38 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh  $A(-3; 4)$ , đường phân giác trong góc A có phương trình  $(d) : x + y - 1 = 0$  và tâm đường tròn ngoại tiếp là  $I(1; 7)$ . Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp bốn lần diện tích tam giác IBC.

**Lời giải tham khảo :**

Ta có  $IA = 5 \Rightarrow$  phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng  $(C) : (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$

Phương trình phân giác góc A cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là D  $\Rightarrow D(-2; 3)$



AD là phân giác trong góc A nên D là trung điểm của cung nhỏ BC  $\Rightarrow ID \perp BC$

Phương trình đường thẳng BC nhận  $\overrightarrow{AD}$  làm vtpt  $\Rightarrow$  phương trình BC có dạng :  $3x + 4y + \alpha = 0$

Ta có diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC nên  $d(A, BC) = 4d(I, BC)$

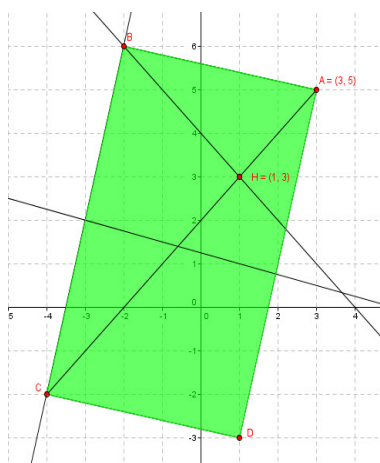
$$\Leftrightarrow \frac{|7 + \alpha|}{5} = 4 \cdot \frac{31 + \alpha}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{114}{3} \\ \alpha = -\frac{131}{5} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng BC là 
$$\begin{cases} 9x + 12y - 114 = 0 \\ 15x + 20y - 131 = 0 \end{cases}$$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 39 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có điểm  $A(3; 5)$ . Điểm  $H(1; 3)$  là hình chiếu của B lên AC và đường trung trực của BC có phương trình  $(d) : x + 4y - 5 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

**Lời giải tham khảo :**



Phương trình đường thẳng AC đi qua A và H  $\Rightarrow AC : x - y + 2 = 0$



Phương trình đường thẳng BH đi qua H và vuông góc với AC  $\Rightarrow BH : x + y - 4 = 0$

Lấy điểm  $B(b; 4 - b) \in BH$  và  $C(c; c + 2) \in AC$

Đường thẳng (d) là trung trực của BC  $\Rightarrow BC \perp (d)$

$$\Rightarrow 4(c - b) - (c + b - 2) = 0 \Leftrightarrow 3c - 5b + 2 = 0 \quad (1)$$

Trung điểm của BC là điểm  $M\left(\frac{b+c}{2}; \frac{6-b+c}{2}\right) \in AC$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{2} + 4 \cdot \frac{6-b+c}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow 5c - 3b + 4 = 0 \quad (2)$$

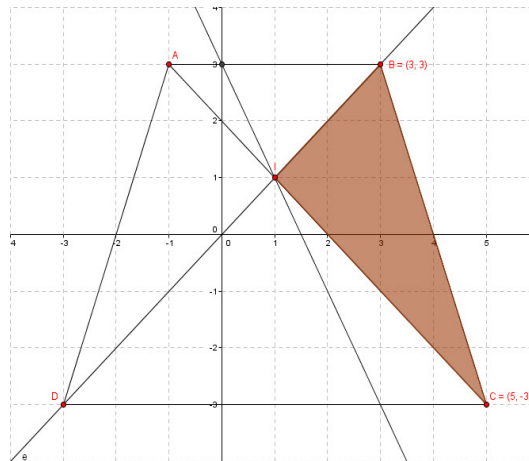
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-2; 6) \\ C(-4; -2) \end{cases}$$

Gọi I là tâm của hình bình hành  $\Rightarrow D(1; -3)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 40 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD biết  $B(3; 3), C(5; -3)$ . Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng (d) :  $2x + y - 3 = 0$ . Diện tích tam giác ABC bằng 12. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang biết  $CI = 2BI$ , điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

**Lời giải tham khảo :**



Lấy điểm  $I(m; 3 - 2m) \in (d)$ . Ta có  $IC = 2IB$

$$\Rightarrow (m - 5)^2 + (6 - 2m)^2 = 4(m - 3)^2 + 4(2m)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I(1; 1)$$

Phương trình đường thẳng AC đi qua I và C  $\Rightarrow AC : x + y - 2 = 0$ .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(B, AC) \cdot AC = 12 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$$

Lấy điểm  $A(a; 2 - a) \in AC$ . Ta có  $AC = 6\sqrt{2}$

$$\Rightarrow (a - 5)^2 + (5 - a)^2 = 72 \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3)$$

Phương trình đường thẳng CD đi qua C và song song với AB  $\Rightarrow CD : y = -3$

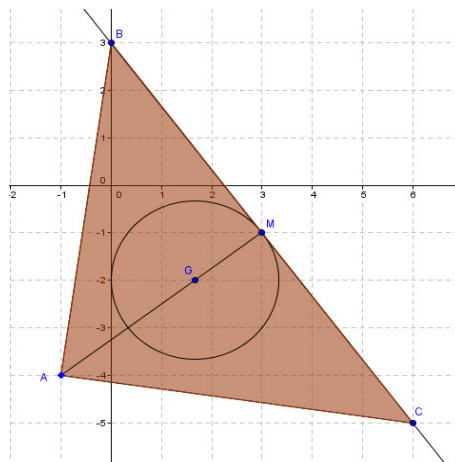
Phương trình đường thẳng BD đi qua B và I  $\Rightarrow BD : x - y = 0$

D là giao điểm của BD và CD  $\Rightarrow D(-3; -3)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 41 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, có trọng tâm  $G\left(\frac{5}{3}; -2\right)$ , bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 5. B và C thuộc đường thẳng  $(d) : 4x + 3y - 9 = 0$ . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

**Lời giải tham khảo :**



Gọi M là trung điểm của BC, ta có  $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}R = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow M$  thuộc đường tròn tâm G bán kính  $\frac{5}{3}$  hay  $M \in (C) : \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{9}$

Tọa độ M là giao điểm của  $(C)$  và  $(d) \Rightarrow M(3; -1)$

Phương trình đường thẳng AM đi qua G và M  $\Rightarrow AM : 3x - 4y - 13 = 0$

G là trọng tâm tam giác ABC  $\Rightarrow AM = 3GM \Rightarrow A(-1; -4)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm M và  $R = 5$

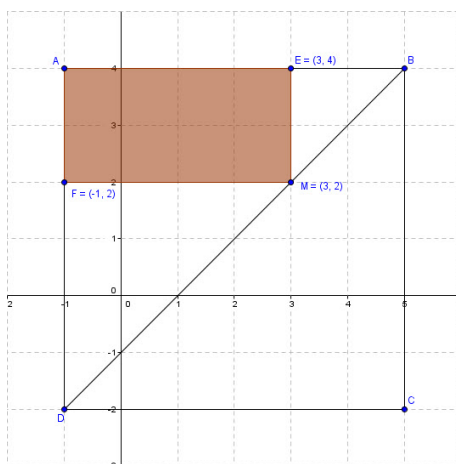
$$\Rightarrow (C_1) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

B và C là giao điểm của  $(d)$  và  $(C_1) \Rightarrow B(0; 3), C(6; -5)$  và ngược lại

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 42 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm  $M(3; 2)$  nằm trên đường chéo BD. Từ M kẻ các đường thẳng ME và MF lần lượt vuông góc với AB tại  $E(3; 4)$  và AD tại  $F(-1; 2)$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

**Lời giải tham khảo :**



Phương trình đường thẳng AB đi qua E và vuông góc với ME  $\Rightarrow AB : y = 4$

Phương trình đường thẳng AD đi qua F và vuông góc với MF  $\Rightarrow AD : x = -1$

A là giao điểm của AB và AD  $\Rightarrow A(-1; 4)$

ABCD là hình vuông  $\Rightarrow ME = BE = 2$  và  $AE = MF = 4$

Lấy điểm  $B(b; 4) \in AB$ . Có  $AE = 2EB \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow B(5; 4)$

Phương trình đường thẳng BD đi qua M và B  $\Rightarrow BD : x - y - 1 = 0$

D là giao điểm của AD và BD  $\Rightarrow D(-1; -2)$

Gọi I là tâm của hình vuông  $\Rightarrow I$  là trung điểm của BD  $\Rightarrow I(2; 1) \Rightarrow C(5; -2)$

Bài toán giải quyết xong.

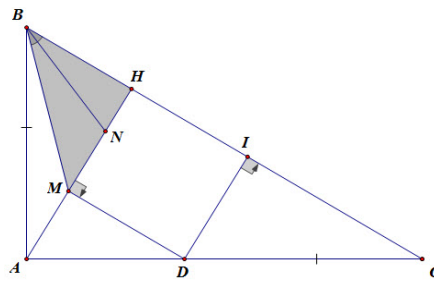
**Đề bài 43 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A (  $AB < AC$  ) có tọa độ đỉnh  $B(2; 1)$ . Đường cao AH có phương trình  $x + 2y - 10 = 0$ . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho  $AB = CD$ . Kẻ DM vuông góc với AH tại M. Đường phân giác góc  $\widehat{CBM}$  cắt AH tại N. Tìm tọa độ điểm N.

**Lời giải tham khảo :**

Từ D hạ DI vuông góc với BC (  $I$  thuộc BC )

Ta có  $\widehat{BAH} = \widehat{DCI} \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CDI \Rightarrow DI = BH$

Tứ giác DMHI là hình chữ nhật  $\Rightarrow DI = MH$  do đó  $BH = MH$  hay tam giác BHM vuông cân



Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AH  $\Rightarrow BC : 2x - y - 3 = 0$

Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi BN và BH ta có  $\cos 45^\circ = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 2}{4}}$

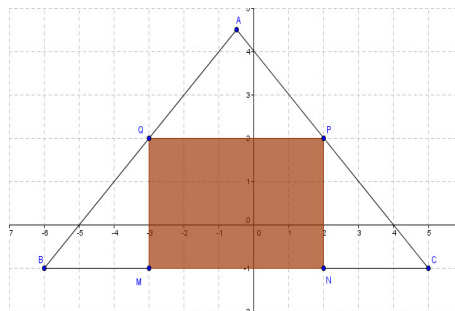
Phương trình đường thẳng BN đi qua B và tạo với BC một góc  $\alpha$

Đến đây bài toán đơn giản là viết phương trình đường thẳng tạo với đường thẳng cho trước 1 góc cho trước ( cái này dành cho bạn đọc )

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 44 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp hình chữ nhật MNPQ. Biết các điểm  $M(-3; -1)$  và  $N(2; -1)$  thuộc cạnh BC, Q thuộc cạnh AB, P thuộc cạnh AC, đường thẳng AB có phương trình  $x - y + 5 = 0$ . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

**Lời giải tham khảo :**



Phương trình đường thẳng BC đi qua M và N  $\Rightarrow BC : y = -1$

MNPQ là hình chữ nhật  $\Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow$  phương trình MQ qua M và vuông góc BC  $\Rightarrow MQ : x = -3$

Q là giao điểm của MQ và AB  $\Rightarrow Q(-3; 2)$

Phương trình PQ qua P và vuông góc với MQ  $\Rightarrow PQ : y = 2$

Phương trình NP qua N và vuông góc với MN  $\Rightarrow NP : x = 2$

P là giao điểm của PQ và NP  $\Rightarrow P(2; 2)$

Phương trình đường thẳng AC đi qua P và vuông góc với AB  $\Rightarrow AC : x + y - 4 = 0$

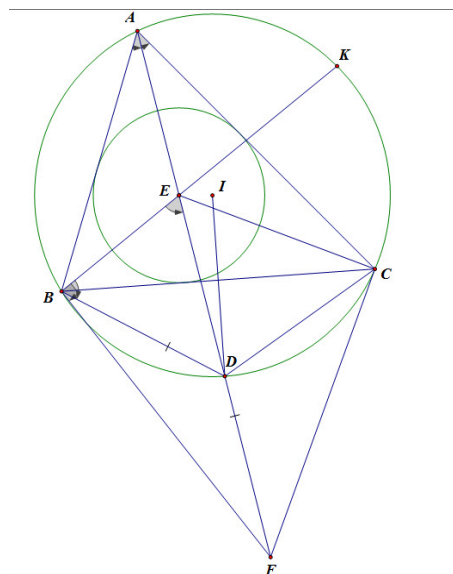
A là giao điểm của AB và AC  $\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$

C là giao điểm của BC và AC  $\Rightarrow C(5; -1)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 45 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{16}\right)$  và  $E(1; 0)$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Đường tròn (T) tiếp xúc với các cạnh BC và các cạnh AB, AC kéo dài có tâm là  $F(2; -8)$ . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết A có tung độ âm.

**Lời giải tham khảo :**



Gọi D, K là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn tâm I

Sử dụng góc nội tiếp và góc có đỉnh bên trong đường tròn ta có  $\widehat{EBD} = \widehat{BED} \Rightarrow \triangle EDB$  cân tại D

Ta có đường tròn tâm F tiếp xúc với BC và các cạnh AB, AC kéo dài  $\Rightarrow AF$  là phân giác của góc  $\widehat{BAC}$  và BF là phân giác ngoài của góc  $\widehat{ABC}$

$\Rightarrow A, E, F$  thẳng hàng và  $BE \perp BF$ . Tam giác BEF vuông tại B có  $BD = DE \Rightarrow D$  là trung điểm của EF

D là trung điểm của EF  $\Rightarrow D\left(\frac{3}{2}; -4\right)$ . Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$(C): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{16}\right)^2 = \left(\frac{65}{16}\right)^2$$

Phương trình đường thẳng AF đi qua E và F  $\Rightarrow AF: 8x + y - 8 = 0$

A là giao điểm của đường tròn (C) và AF  $\Rightarrow A(\dots)$

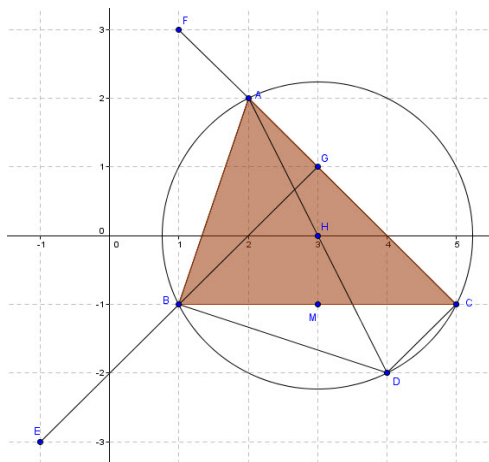
Giả sử điểm  $B(a; b)$ . Ta có  $B \in (C) \Rightarrow 1$  phương trình

$BE \perp BF \Rightarrow 1$  phương trình. Từ đó ta có điểm B

Bài toán giải quyết xong. ( Bài này lười tính hihi )

**Đề bài 46 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm  $M(3; -1)$  là trung điểm của BC. Đường thẳng AC đi qua điểm  $F(1; 3)$ . Điểm  $E(-1; -3)$  thuộc đường cao xuất phát từ B. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết điểm  $D(4; -2)$  là điểm đối xứng với điểm A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Lời giải tham khảo :**



D đối xứng với A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $\Rightarrow AD$  là đường kính  $\Rightarrow CD \perp AC$

Giả sử  $C(a; b)$ . M là trung điểm của BC  $\Rightarrow B(6 - a; -2 - b)$

Ta có  $CD \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow (4 - a)(1 - a) + (3 - b)(-2 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + b^2 - b - 2 = 0 \quad (1)$$

E thuộc đường cao hạ từ B  $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CF}$

$$\Rightarrow (1 - a)(7 - a) + (1 - b)(3 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + b^2 - 4b + 10 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = 5; b = -1 \\ a = 4; b = -2 \end{cases} \Rightarrow C(5; -1) \Rightarrow B(1; -1)$$

Phương trình đường thẳng AB đi qua B và vuông góc với BD  $\Rightarrow AB : 3x - y - 4 = 0$

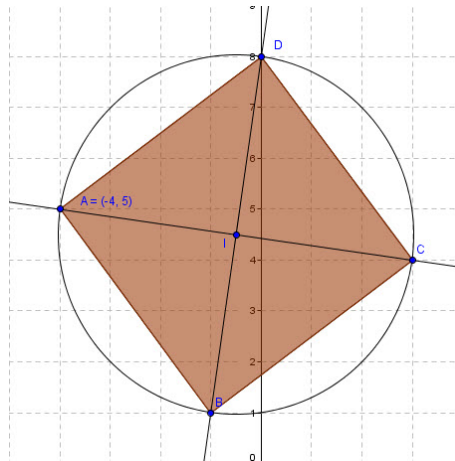
Phương trình đường thẳng AC đi qua C và F  $\Rightarrow AC : x + y - 4 = 0$

A là giao điểm của AB và AC  $\Rightarrow A(2; 2)$

Bài toán giải quyết xong.

**Đề bài 47 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có đỉnh  $A(-4; 5)$  và phương trình một đường chéo là  $(d) : 7x - y + 8 = 0$ . Viết phương trình các cạnh của hình vuông ABCD.

**Lời giải tham khảo :**



Ta có A không nằm trên  $(d) \Rightarrow (d)$  là phương trình đường chéo BD

Phương trình đường chéo AC đi qua A và vuông góc với  $(d) \Rightarrow AC : x + 7y - 31 = 0$

Tâm I của hình vuông là giao điểm của AC và BD  $\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$

I là trung điểm của AC  $\Rightarrow C(3; 4)$

Ta có  $AC = 5\sqrt{2} \Rightarrow$  hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm I bán kính  $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow (C) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

B và D là giao điểm của  $(d)$  và  $(C) \Rightarrow B$  và D có tọa độ  $(-1; 1); (0; 8)$

Đến đây bài toán quá đơn giản dành cho bạn đọc.

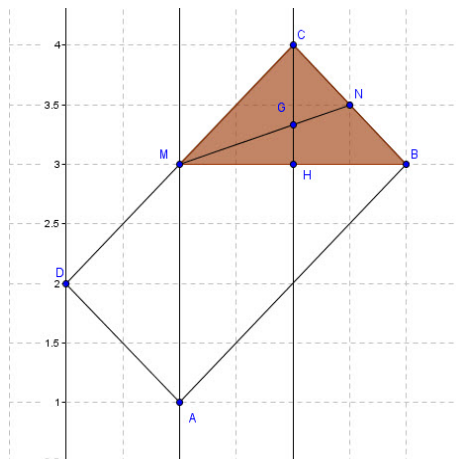
**Đề bài 48 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có  $AB = 2AD$ . Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Điểm  $G\left(2; \frac{10}{3}\right)$  là trọng tâm tam giác BCM. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết phương trình đường thẳng AM :  $x - 1 = 0$ .

**Lời giải tham khảo :**

Hình chữ nhật ABCD có  $AB = 2AD$  và M là trung điểm của CD  $\Rightarrow AD = CM = DM = BC$

$\Rightarrow \triangle BCM$  vuông cân tại M  $\Rightarrow CG \perp BM$  ( G là trọng tâm )

Dễ thấy  $BM \perp AM \Rightarrow AM \parallel CG$  ( cùng vuông góc với BM)



Phương trình CG đi qua G và song song với AM  $\Rightarrow CG : x - 2 = 0$

Gọi H là trung điểm của BM. Ta có độ dài đoạn MH chính là khoảng cách giữa AM và CG  $\Rightarrow MH = 1$

$$\Rightarrow BM = 2 \Rightarrow BC = CM = \sqrt{2} \Rightarrow CN = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow MG = \frac{2}{3}MN = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{Lấy điểm } M(1; m) \in AM \Rightarrow MG^2 = (1-2)^2 + \left(m - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{10}{9} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Với  $m = 3 \Rightarrow M(1; 3)$ . Phương trình MH đi qua M vuông góc với AM  $\Rightarrow MH : x = 3 \Rightarrow H(2; 3)$

H là trung điểm của MB  $\Rightarrow B(3; 3)$

$$\text{Lấy điểm } C(2; c) \in CG \text{ ta có } \overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} \Rightarrow C(2; 4)$$

M là trung điểm của CD  $\Rightarrow D(0; 2)$

Phương trình AD đi qua điểm D và vuông góc với CD  $\Rightarrow AD : x + y - 2 = 0$

A là giao điểm của AM và AD  $\Rightarrow A(1; 1)$

Với  $m = \frac{11}{3}$  xét tương tự. Bài toán giải quyết xong.

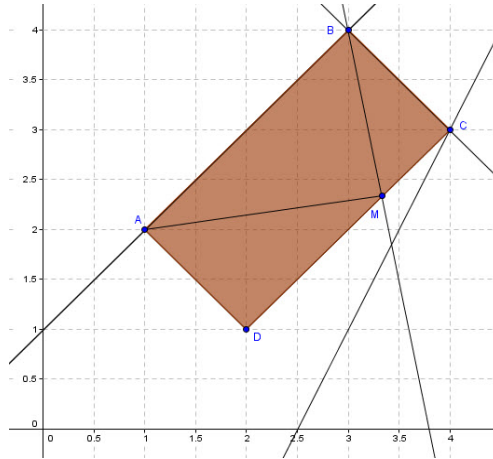
**Đề bài 49 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có  $A(1; 2)$ , điểm C nằm trên đường thẳng  $(d) : 2x - y - 5 = 0$  và  $AB = 2AD$ . Gọi M là điểm nằm trên cạnh CD sao cho  $DM = 2CM$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết phương trình cạnh BM :  $5x + y - 19 = 0$ .

**Lời giải tham khảo :**

$$\text{Đặt } AD = BC = x \Rightarrow CD = AB = 2x \Rightarrow CM = \frac{1}{3}CD = \frac{2x}{3} \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{13}x}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{MBC} = \frac{BC}{BM} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin \widehat{MBC} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos \widehat{ABM} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$





Góc giữa AB và BM chính là góc  $\widehat{ABM}$ . Gọi  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của đường thẳng AB

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABM} = \frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow 17a^2 + 10ab - 7b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = \frac{7}{17}b \end{cases}$$

Với  $a = -b \Rightarrow \vec{n} = (1; -1)$ . Phương trình đường thẳng AB đi qua A có vtpt  $\vec{n} \Rightarrow AB : x - y + 1 = 0$

B là giao điểm của AB và BM  $\Rightarrow B(3; 4)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB  $\Rightarrow BC : x + y - 7 = 0$

C là giao điểm của BC và  $(d) \Rightarrow C(4; 3)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB  $\Rightarrow AD : x + y - 3 = 0$

Phương trình đường thẳng CD đi qua C và vuông góc với BC  $\Rightarrow CD : x - y - 1 = 0$

D là giao điểm của AD và CD  $\Rightarrow D(2; 1)$

Trường hợp còn lại chúng ta làm tương tự.

Bài toán giải quyết xong.

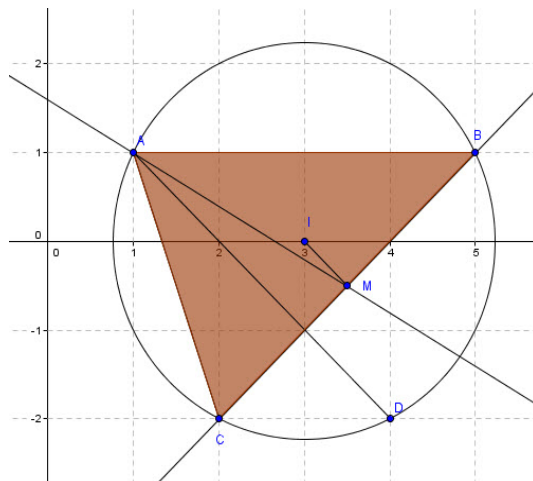
**Đề bài 50 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC có phương trình lần lượt là  $(d_1) : 3x + 5y - 8 = 0$ ;  $(d_2) : x - y - 4 = 0$ . Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai  $D(4; -2)$ . Viết phương trình các cạnh AB và AC biết hoành độ điểm B lớn hơn 3.

**Lời giải tham khảo :**

Trung điểm M của BC là giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_2) \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với BC  $\Rightarrow AD : x + y - 2 = 0$

A là giao điểm của AD và AM  $\Rightarrow A(1; 1)$ . Giả sử N là trung điểm của AD  $\Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$



Phương trình trung trực của AD đi qua N và vuông góc với AD  $\Rightarrow (d_3) : x - y - 3 = 0$

Phương trình trung trực của BC đi qua M và vuông góc với BC  $\Rightarrow (d_4) : x + y - 3 = 0$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC  $\Rightarrow I$  là giao điểm của  $(d_3)$  và  $(d_4) \Rightarrow I(3; 0) \Rightarrow IA = \sqrt{5}$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là I và bán kính  $R = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow (C) : (x - 3)^2 + y^2 = 5$$

Tọa độ B và C là giao điểm của  $(C)$  và  $(d_2) \Rightarrow B, C$  có tọa độ  $(5; 1); (2; -2)$

Hoành độ B lớn hơn 3  $\Rightarrow B(5; 1); C(2; -2)$

Bài toán giải quyết xong.

*continue ...*