

Đề Chính Thức

Câu 1. (3đ)

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$
- b) Giải hệ phương trình : $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40$
- c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$

Câu 2. (2đ)

- a) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a + b \geq 2$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx - 2a + 2 = 0$ luôn có nghiệm
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m; n)$ thỏa mãn phương trình : $2^m \cdot m^2 = 9n^2 - 12n + 19$

Câu 3. (1đ) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức : $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + 3c^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + 3a^2 + 1}}$

Câu 4. (3đ) Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại J khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBJ cắt đường thẳng AB tại M khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác ICJ cắt đường thẳng AC tại N khác C

- a) Chứng minh rằng $BJM = CJN$ và ba điểm M, I, N thẳng hàng
- b) Chứng minh JA là tia phân giác của BJN và OA vuông góc với MN
- c) Tia phân giác của góc BAC cắt MN tại E. Tia phân giác của các góc BME và CNE lần lượt cắt BE, CE tại P, Q. Chứng minh $PB \cdot QE = PE \cdot QC$

Câu 5. (1đ) Trên mặt phẳng cho 17 điểm phân biệt. trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Giữa hai điểm bất kỳ trong ba điểm đã cho ta nối một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên dương (các số ghi trên các đoạn thẳng là các số nguyên dương khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có cạnh là các đoạn thẳng đã nối mà tổng các số ghi trên 3 cạnh của tam giác đó chia hết cho 3

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

$$b) x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - \frac{6x^2}{x-3} - 40 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 40 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x^2}{x-3} \text{ ta có phương trình } t^2 - 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$t = 10 \Rightarrow \frac{x^2}{x-3} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$t = -4 \Rightarrow \frac{x^2}{x-3} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 6\}$

$$c) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - y^3 = (x^2 - 2y^2)(x - 2y) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + 3xy + 5y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 0 \end{cases}$$

TH1: $x = y$ thay vào pt (1) ta được $x = y = \pm 1$

$$\text{TH2: } x^2 + 3xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{11}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Thử lại ta thấy $x = y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(1; 1); (-1; -1)$

Câu 2.

a) Nếu $a = 0$ thì $b \geq 2$ và do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{b}$

Nếu $a \neq 0$ thì $\Delta = b^2 + 8a(a - 1)$

Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow a(a-1) \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$ nên phương trình có nghiệm

Nếu $0 < a < 1$ thì

$$a + b \geq 2 \Rightarrow b \geq 2 - a > 0 \Rightarrow b^2 \geq (2 - a)^2 \Rightarrow \Delta \geq (2 - a)^2 + 8a(a - 1) = (3a - 2)^2 \geq 0$$

Nên phương trình có nghiệm

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi số thực a, b thỏa mãn $a + b \geq 2$

$$\text{b) Ta có : } 2^m \cdot m^2 = 9n^2 - 12n + 19 \Leftrightarrow 2^m \cdot m^2 = (3n - 2)^2 + 15$$

Nếu m lẻ $\Rightarrow m = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow 2^m \cdot m^2 = 2 \cdot 4^k \cdot m^2 = (3 + 1)^k 2m^2 \equiv 2m^2 \pmod{3} \text{ mà } m^2 \equiv 0; 1 \pmod{3}$$

Nên $2 \cdot 4^k \cdot m^2 \equiv 0; 2 \pmod{3}$. Mặt khác $(3n - 2)^2 + 15 \equiv 1 \pmod{3}$

Vậy trường hợp này không xảy ra

Nếu m chẵn $\Rightarrow m = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ thì ta có phương trình:

$$2^{2k} \cdot m^2 - (3n - 2)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k \cdot m + 3n - 2)(2^k \cdot m - 3n + 2) = 15 (*)$$

Vì $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $2^k \cdot m + 3n - 2 > 2^k \cdot m - 3n + 2$ và $2^k \cdot m + 3n - 2 > 0 \Rightarrow 2^k \cdot m - 3n + 2 > 0$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot m + 3n - 2 = 15 \\ 2^k \cdot m - 3n + 2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2^k \cdot m + 3n - 2 = 5 \\ 2^k \cdot m - 3n + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2^k \cdot m + 3n - 2 = 15 \\ 2^k \cdot m - 3n + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 8 \\ n = 3 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2^k \cdot m + 3n - 2 = 5 \\ 2^k \cdot m - 3n + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 4 \\ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $m = 2, n = 1$

Câu 3.

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1} \geq \frac{1}{4}(a + 5b + 2) \forall a, b > 0 (*)$

$$\text{Thật vậy ta có } (*) \Leftrightarrow 16(a^2 - ab + 3b^2 + 1) \geq (a + 5b + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 13(a - b)^2 + 10(b - 1)^2 + 2(a - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

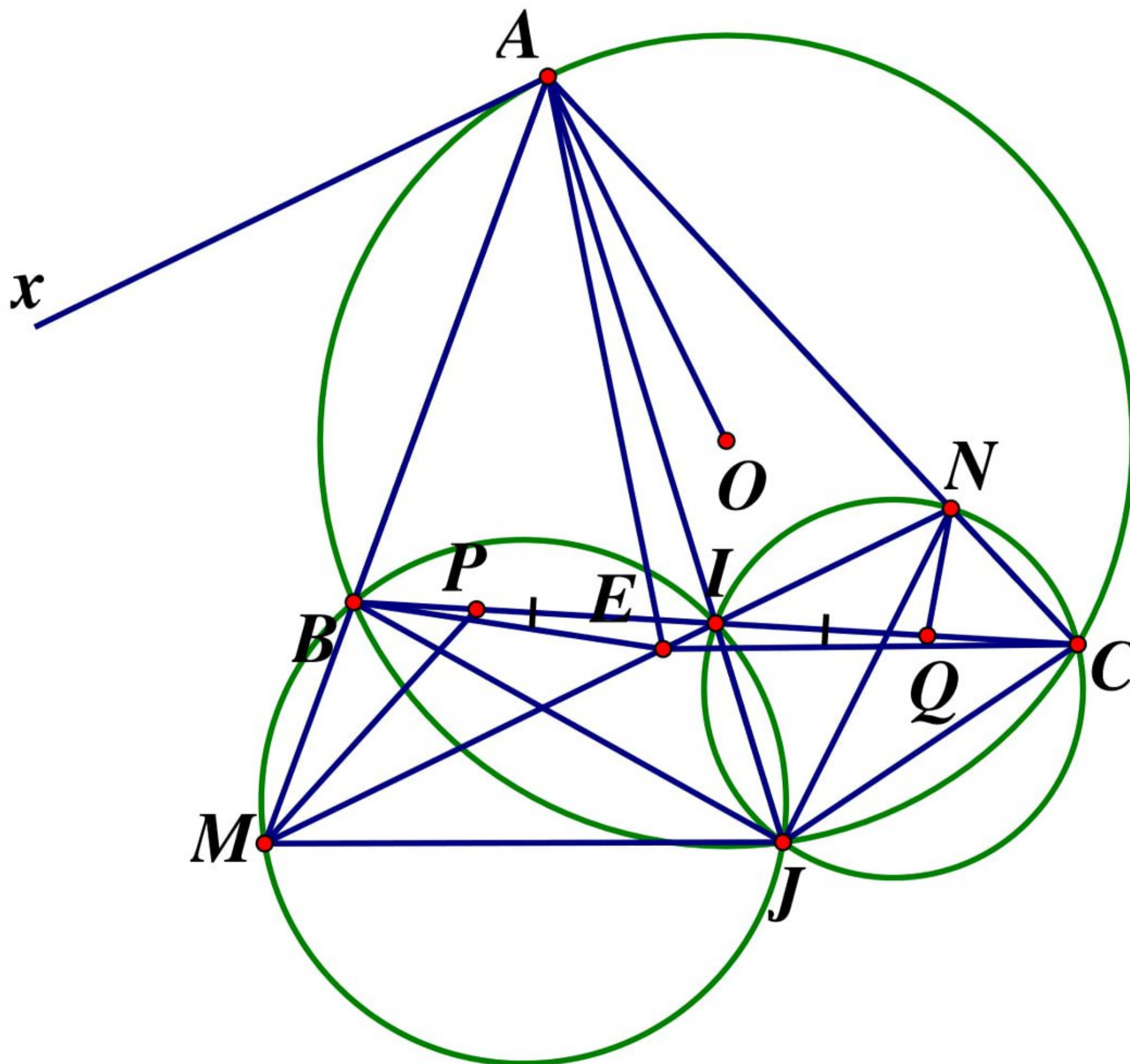
$$\text{Do đó } P \leq \frac{4}{a + 5b + 2} + \frac{4}{b + 5c + 2} + \frac{4}{c + 5a + 2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \forall x, y > 0$ ta có:

$$P \leq \sum \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2} \right) + \sum \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} \right) \leq \frac{3}{8} \cdot \sum \frac{1}{a} + \frac{3}{8} \leq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $MaxP = \frac{3}{2}$

Câu 4.



a) Tứ giác $ABJC$ nội tiếp nên $JCN = MBJ$

Tứ giác $MBIJ$ nội tiếp nên $BMJ = JIC$

Tứ giác $NCJI$ nội tiếp nên $JIC = JNC \Rightarrow JNC = BMJ$

Do đó $\triangle BJM \sim \triangle CJN \Rightarrow BJM = CJN$

Ta lại có: $BIM = BJM, CIN = CJN \Rightarrow BIM = CIN$

Suy ra M, I, N thẳng hàng

b) $ABJC$ và $CNIJ$ là tứ giác nội tiếp nên $AJB = ACB = NCI; NCI = NJI$

suy ra $AJB = AJN \Rightarrow JA$ là tia phân giác của BJN

Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) . Suy ra $AJB = BAx$

Ta lại có: $AJB = BMN$, do đó $BAx = BMN$ nên $MN \parallel Ax$

Vậy $AO \perp MN$

c) Vì $\triangle BJM \sim \triangle CJN \Rightarrow \frac{S_{BJM}}{S_{CJN}} = \frac{MB^2}{CN^2}$

Vì I là trung điểm của BC nên $S_{ABJ} = S_{ACJ}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{S_{ABJ}}{S_{ACJ}} = \frac{S_{ABJ}}{S_{BJM}} \cdot \frac{S_{CJN}}{S_{ACJ}} = \frac{AB}{MB} \cdot \frac{MB^2}{NC^2} \cdot \frac{NC}{AC} = \frac{AB \cdot MB}{AC \cdot CN}$$

Ta lại có $MNIJ, NCJI$ nội tiếp nên $AB \cdot AM = AI \cdot AJ = AN \cdot AC$

$$\text{Suy ra } \frac{MB}{NC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AN} = \frac{EM}{EN} \Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{NC}{NE}$$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có: $\frac{MB}{ME} = \frac{PB}{PE}; \frac{QC}{QE} = \frac{NC}{NE}$

$$\Rightarrow \frac{PB}{PE} = \frac{QC}{QE} \Rightarrow PB \cdot QE = PE \cdot QC$$

Câu 5.

Ta tô màu các đoạn thẳng bằng 3 màu đỏ, xanh, vàng. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tam giác có ba cạnh được tô cùng màu.

Gọi A là một điểm đã cho, nối A với 16 điểm còn lại ta được 16 đoạn thẳng.

Ta có: $16 = 3 \cdot 5 + 1$ nên theo định lý Dirichle tồn tại ít nhất 6 đoạn thẳng được tô cùng màu.

Giả sử 6 đoạn thẳng đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG có cùng màu đỏ. Xét các đoạn thẳng nối từng cặp điểm trong 6 điểm B, C, D, E, F, G thì xảy ra trường hợp sau:

TH1: Tồn tại một đoạn thẳng được tô màu đỏ, chẳng hạn là BC thì tam giác ABC có ba cạnh cùng màu đỏ

TH2: Tất cả các đoạn thẳng nối B, C, D, E, F, G chỉ có màu xanh hoặc vàng. Ta xét 5 đoạn thẳng BC, BD, BE, BF, BG được tô bởi 2 màu thì theo nguyên lý Dirichle tồn tại ít nhất 3 đoạn thẳng có cùng một màu. Giả sử BC, BD, BE có cùng màu xanh
+ Nếu trong ba đoạn thẳng CD, CE, DE có một đoạn tô màu xanh, chẳng hạn CD thì tam giác BCD có ba cạnh cùng màu xanh.

+Nếu trong ba đoạn thẳng CD, CE, DE không có đoạn nào tô màu xanh, thì tam giác CDE có ba cạnh màu vàng

Do vậy tồn tại một tam giác có ba cạnh tô cùng màu

Lấy các số nguyên dương trên mỗi đoạn thẳng chia cho 3 ta được các số dư là 0,1,2.

Tô màu các đoạn thẳng có số dư là 0,1,2 tương ứng với 3 màu đỏ,xanh, vàng

Theo kết quả thì luôn tồn tại một tam giác có 3 cạnh được tô cùng màu, tức là 3 số ghi trên cạnh của tam giác có cùng số dư r khi chia cho 3, chẳng hạn là

$3h + r, 3k + r, 3q + r$, Khi đó:

$3h + r + 3k + r + 3q + r = 3(h + k + q + r)$ là số chia hết cho 3