Câu 1: **(THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018)** Hình đa diện nào sau đây không có tâm đối xứng?

A. Hình bát diện đều. **B.** Hình tứ diện đều. **C.** Hình lập phương. **D.** Hình hộp chữ nhật.

Lời giải

Chọn B

Câu 2: **(THPT Tam Phước-Đồng Nai-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, độ dài đường cao bằng 4 cm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ này?

A. $24\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $22\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $26\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $20\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh, ta có: $S_{xq}=2\pi R.l=2\pi.3.4=24\pi\left(\text{cm}^2\right)$

Câu 3: **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
B. Hình chóp có đáy là hình thoi thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
C. Hình chóp có đáy là hình tứ giác thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
D. Hình chóp có đáy là hình tam giác thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải:

Chọn D

Điều kiện để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đa giác đáy là đa giác nội tiếp đường tròn. Do đó: Đáy là tam giác thì luôn có tâm đường tròn ngoại tiếp.

Câu 4: **(THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2.

A. $V=4\pi$. **B.** $V=12\pi$. **C.** $V=16\pi$. **D.** $V=8\pi$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối trụ $V=\pi r^2h=\pi.2^2.2=8\pi$.

Câu 5: **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-nawm-2018)** Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

A. $S_{xq}=\pi rh$. **B.** $S_{xq}=2\pi rl$. **C.** $S_{xq}=\pi rl$. **D.** $S_{xq}=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Lời giải

Chọn C

$S_{xq}=\pi rl$.

Câu 7: (THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=16\pi\sqrt{3}$. **B.** $V=12\pi$. **C.** $V=4$. **D.** $V=4\pi$.

Lời giải

Chọn D

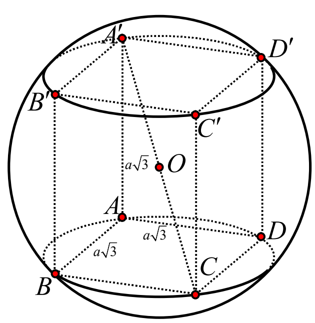
Thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2.4=4\pi$.

Câu 8: (THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tính đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$

A. $6a$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $3a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình lập phương

Ta có các tứ giác $AA'C'C$, $ABC'D'$ và $BB'D'D$ là các hình chữ nhật

$$\Rightarrow \begin{cases} OA=OC=OA'=OC' \\ OB=OD=OB'=OD' \\ OA=OB=OC'=OD' \end{cases} \Rightarrow O \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương.}$$

Khi đó đường kính $d=AC'=a\sqrt{3}.\sqrt{3}=3a$.

Câu 9: (THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018) Nếu cạnh của hình lập phương tăng lên gấp 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích của hình lập phương cạnh a là a^3.

Do đó khi tăng cạnh hình lập phương lên 2 lần thì thể tích là $8a^3$.

Câu 10: **(THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho đường thẳng l cắt và không vuông góc với Δ quay quanh Δ thì ta được

A. Hình nón tròn xoay. **B.** Mặt nón tròn xoay.

C. Khối nón tròn xoay. **D.** Mặt trụ tròn xoay.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa.

Câu 11: **(THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Khối trụ tròn xoay có đường kính đáy là $2a$, chiều cao là $h = 2a$ có thể tích là:

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = 2\pi a^2 h$. **C.** $V = 2\pi a^2$. **D.** $V = 2\pi a^3$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $V = Sh = \pi r^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$. s

Câu 12: **(THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Thể tích của một khối cầu có bán kính R là

A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $V = \frac{4}{3}\pi R^2$. **C.** $V = \frac{1}{3}\pi R^3$. **D.** $V = 4\pi R^3$.

Lời giải

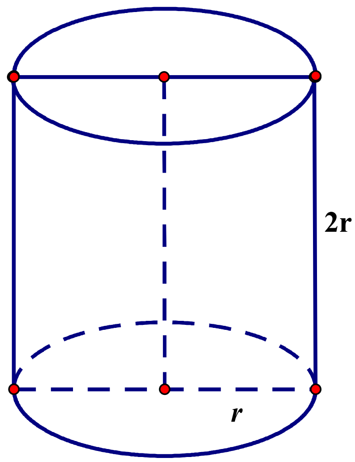
Chọn A

Câu 13:(THPT Triệu Sơn 1-lần 1 năm 2017-2018) Một hình trụ có bán kính đáy bằng r và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ đó là

A. $6\pi r^2$. **B.** $2\pi r^2$. **C.** $8\pi r^2$. **D.** $4\pi r^2$.

Lời giải

Chọn A



Do thiết diện qua trục là hình vuông nên $h = l = 2r$.

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi r.2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$.

Câu 14:(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là

A. $S = \pi R^2$. **B.** $S = \frac{4}{3}\pi R^3$. **C.** $S = \frac{3}{4}\pi R^2$. **D.** $S = 4\pi R^2$.

Lời giải

Chọn D

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Câu 15:(THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018) Trong các hình đa diện sau, hình nào **không** nội tiếp được trong một mặt cầu?

A. Hình tứ diện. **B.** Hình hộp chữ nhật.
C. Hình chóp ngũ giác đều. **D.** Hình chóp có đáy là hình thang vuông.

Lời giải

Chọn D

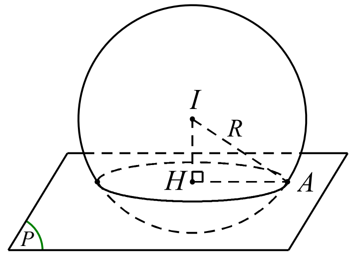
Vì hình thang vuông không nội tiếp được trong một đường tròn nên hình chóp có đáy là hình thang vuông không nội tiếp được trong một mặt cầu.

Câu 16:(THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018) Cho hình cầu đường kính $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Bán kính hình cầu đã cho là $R = a\sqrt{3}$.

Khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) là $d = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a$.

Câu 17: **(THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018)** Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

A. 50 m^2. **B.** $50\pi\text{ m}^2$. **C.** $100\pi\text{ m}^2$. **D.** 100 m^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có chu vi đáy $C = 2\pi R = 5$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rl = 5.20 = 100\text{ m}^2$.

Câu 18: **(THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018)** Cho khối nón có chiều cao bằng 24 cm, độ dài đường sinh bằng 26 cm. Tính thể tích V của khối nón tương ứng.

A. $V = 800\pi\text{ cm}^3$. **B.** $V = 1600\pi\text{ cm}^3$. **C.** $V = \dfrac{1600\pi}{3}\text{ cm}^3$. **D.** $V = \dfrac{800\pi}{3}\text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính đáy của hình nón: $R = \sqrt{l^2 - h^2} = 10$ cm.

Vậy thể tích khối nón tương ứng là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.h = \dfrac{1}{3}\pi.100.24 = \dfrac{800\pi}{3}$.

Câu 19: **(THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. Bán kính mặt cầu bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích mặt cầu $S_C = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2 = \dfrac{8\pi a^2}{3} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20: **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $72\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Bán kính R của khối cầu bằng:

A. $R = 6\ (\text{cm})$. **B.** $R = \sqrt{6}\ (\text{cm})$. **C.** $R = 3\ (\text{cm})$. **D.** $R = 3\sqrt{2}\ (\text{cm})$.

Lời giải

Chọn D

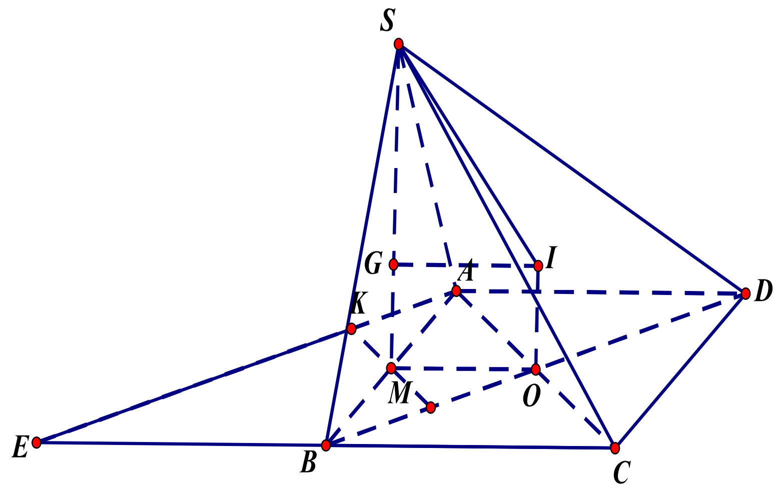
* Ta có diện tích của mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 72\pi \Leftrightarrow R^2 = 18 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$.

Câu 21:(THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích $84\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $\frac{2\sqrt{21}}{7}\ (\text{cm})$. **B.** $\frac{3\sqrt{21}}{7}\ (\text{cm})$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}\ (\text{cm})$. **D.** $\frac{6\sqrt{21}}{7}\ (\text{cm})$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AB và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB, O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OM \perp (SAB)$. Dựng trục của hình vuông $ABCD$ và trục tam giác SAB, khi đó chúng đồng phẳng và cắt nhau tại I tức là OI, GI là các trục hình vuông $ABCD$ và trục tam giác SAB.

Bán kính mặt cầu là $R = SI$. Ta có $4\pi R^2 = 84\pi\left(\text{cm}^2\right) \Leftrightarrow R = \sqrt{21}\,(\text{cm})$. Đặt $AB = x\ (\text{cm})$

Trong tam giác vuông SGI ta có $SI^2 = SG^2 + GI^2\ (1)$, ta có $GI = \frac{x}{2}$, $SG = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ thay vào (1) tính được $x = 6$.

Dựng hình bình hành $ABDE$. Khoảng cách d giữa BD và SA là $d = d\left(BD,(SAE)\right)$

$d = d\left(B,(SAE)\right) = 2d\left(M,(SAE)\right)$. Kẻ $MK \perp AE$ ta có $(SAE) \perp (SMK)$.

$d\left(M,(SAE)\right) = d\left(M,SK\right) = \frac{SM.MK}{\sqrt{SM^2 + MK^2}}\ (2)$. Ta có $SM = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $MK = \frac{x\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Thay các giá trị vào (2) tính được $d\left(M,(SAE)\right) = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

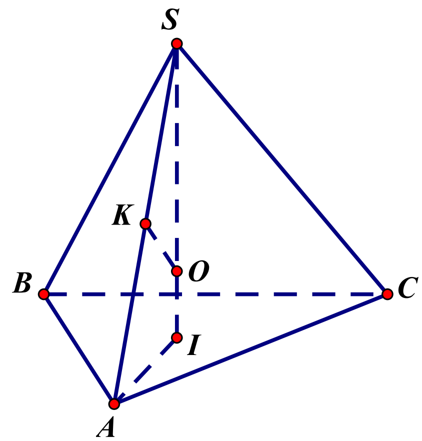
Vậy khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.

Câu 22: (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2a$ và tam giác ABC có góc A bằng $120°$ và $BC = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do $SA = SB = SC$ nên ta có $SI \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm của SA. Gọi OK là đường trung trực của SA và $O \in SI$.

Khi đó O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$ và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4IA}$.

Suy ra: $\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 120° = \dfrac{AB.AC.2a}{4IA} \Leftrightarrow IA = \dfrac{4a}{4.\sin 120°} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

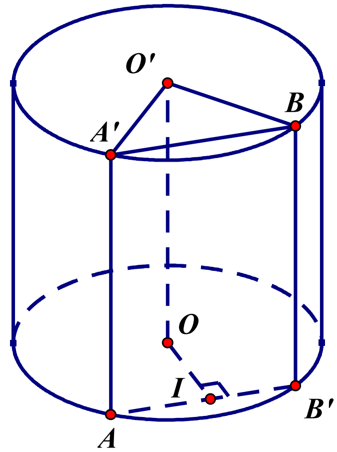
Do $\Delta SKO \,\#\, \Delta SIA$ nên $\dfrac{SK}{SI} = \dfrac{SO}{SA} \Leftrightarrow SO = \dfrac{SK.SA}{SI} = \dfrac{SA^2}{2SI} = \dfrac{4a^2}{2.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 23: **(THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B



Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.
Gọi B' là hình chiếu của B lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O.

Gọi R là bán kính của đường tròn tâm O, suy ra: $R = 2a$. Ta có: $\alpha = \widehat{BAB'}$.
Suy ra: $AB' = 2R\tan\alpha$. Gọi I là trung điểm của $AB' \Rightarrow OI \perp AB'$.

Ta có: $OI = \sqrt{OB'^2 - IB'^2} = \sqrt{R^2 - R^2\tan^2\alpha} = R\sqrt{1-\tan^2\alpha}$.

Và: $S_{\Delta OAB'} = \dfrac{1}{2}OI.AB' = \dfrac{1}{2}R.\sqrt{1-\tan^2\alpha}.2R\tan\alpha = R^2\tan\alpha.\sqrt{1-\tan^2\alpha}$.

Suy ra: $V_{OO'AB} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} = \dfrac{1}{3}OO'.S_{\Delta OAB'} = \dfrac{1}{3}.2R.R^2\tan\alpha.\sqrt{1-\tan^2\alpha}$.

Ta có: $V_{OO'AB}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\tan\alpha.\sqrt{1-\tan^2\alpha}$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(t) = t.\sqrt{1-t^2}$ với $t \in [-1;1]$ có $f'(t) = \sqrt{1-t^2} + \dfrac{t.(-t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ với $t \in (-1;1)$.

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì $0° < \alpha < 90°$ nên $\tan\alpha > 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗	y_{CD}	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{\max}$ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

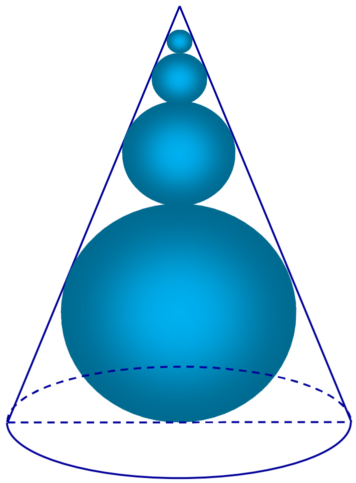
Câu 24: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng $60°$, độ dài đường sinh bằng a. Dãy hình cầu (S_1), (S_2), (S_3),..., (S_n),... thỏa mãn: (S_1) tiếp xúc với mặt đáy và các đường sinh của hình nón (N); (S_2) tiếp xúc ngoài với (S_1) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N);

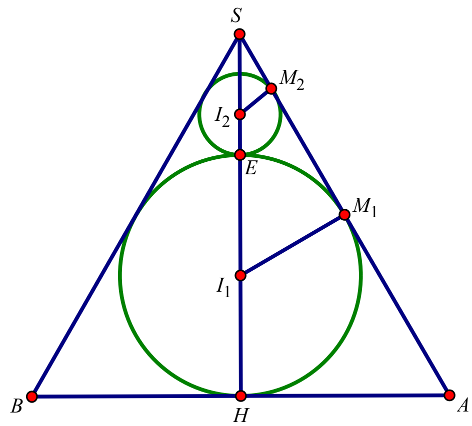
(S_3) tiếp xúc ngoài với (S_2) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N). Tính tổng thể tích các khối cầu (S_1), (S_2), (S_3),..., (S_n),... theo a.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{52}$. **B.** $\frac{27\pi a^3\sqrt{3}}{52}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{48}$. **D.** $\frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn A





Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm của mặt cầu (S_1) và (S_2).

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó ta có ΔSAB đều và $R_1 = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hạ $I_1M_1 \perp SA$, $I_2M_2 \perp SA$.

Xét ΔSI_2M_2 có $\sin 30^\circ = \frac{I_2M_2}{SI_2} \Rightarrow SI_2 = 2I_2M_2$. Khi đó ta có $SH = SI_2 + I_2E + EH$

$\Leftrightarrow 3r_1 = 3r_2 + 2r_1 \Leftrightarrow r_1 = 3r_2$.

Chứng minh tương tự ta có $r_2 = 3r_3, \ldots, r_n = 3r_{n+1}$.

Do đó dãy bán kính r_1, $r_2, \ldots, r_n$,. lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.

Suy ra dãy thể tích của các khối cầu (S_1), (S_2), …,(S_n),… lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $V_1 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3$ và công bội $q_1 = \frac{1}{27}$.

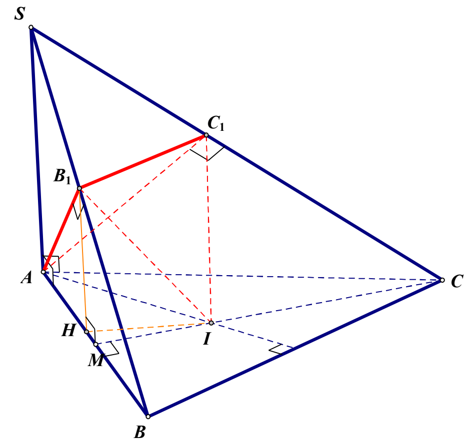
Vậy tổng thể tích của các khối cầu $(S_1),(S_2),\ldots,(S_n),\ldots$ là: $V = \frac{V_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{52}\pi a^3$.

Câu 25: **(SGD Ninh Bình năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính theo a bán kính R của mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $SA = x$, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H là hình chiếu của B_1 trên cạnh AB, M là trung điểm của AB.

Ta có $SA^2 = SB_1.SB \Rightarrow \frac{SB_1}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{a^2+x^2}$, tương tự ta cũng có $\frac{SC_1}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{x^2}{a^2+x^2}$.

Suy ra $B_1C_1 // BC$, $B_1H // SA$ nên $\frac{BB_1}{SB} = \frac{HB_1}{SA} = \frac{BH}{AB} = \frac{a^2}{x^2+a^2}$

$\Rightarrow HB_1 = \frac{xa^2}{x^2+a^2}$, $HB = \frac{a.x^2}{x^2+a^2}$.

Ta chỉ cần chứng minh $IA = IB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Giả sử $x > a$ ($x \le a$ ta làm tương tự).

Khi đó $HB = \frac{a.x^2}{x^2+a^2} > BM = \frac{a}{2}$, suy ra $HM = \frac{a.x^2}{x^2+a^2} - \frac{a}{2} = \frac{a\left(x^2-a^2\right)}{2\left(x^2+a^2\right)}$

$IB_1^2 = HI^2 + B_1H^2 = HM^2 + IM^2 + B_1H^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow IB_1 = IA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

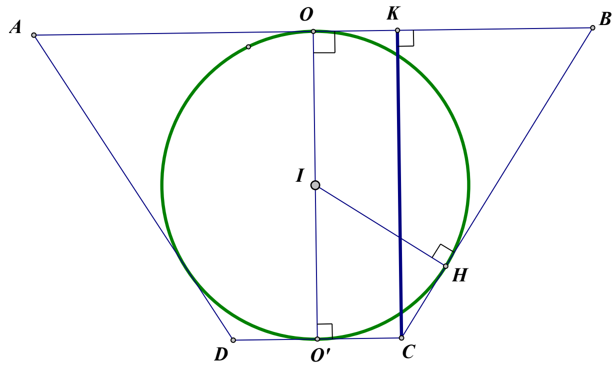
Vậy $IA = IB = IC = IB_1 = IC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ là bán kính mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

Câu 26: **(SGD Ninh Bình năm 2017-2018)** Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = 2a$, $DC = 2b$, $O'O = 2c$. Ta có V_1 là thể tích chiếc cốc, V_2 là thể tích của bi.

Ta có $CK = 2c$, $CB = a + b$, $BK = a - b$. Do tam giác CKB vuông tại K ta có

$CB^2 = CK^2 + BK^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4c^2 + a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow ab = c^2$.

Mặt khác $V_1 = \dfrac{\pi 2c}{3}\left(a^2 + b^2 + ab\right)$, $V_2 = \dfrac{4\pi}{3}c^3$.

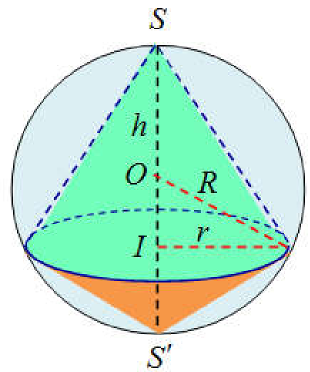
Theo giả thiết lượng nước tràn ra bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu, suy ra $V_1 = 2V_2 \Leftrightarrow c\left(a^2 + b^2 + ab\right) = 4c^3$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab = 4ab \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, do $a > b$ nên $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 27: **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu (S) bán kính R. Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là:

A. $\dfrac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $\dfrac{32R^3}{81}$. **C.** $\dfrac{32\pi R^3}{27}$. **D.** $\dfrac{32R^3}{27}$.

Lời giải



Chọn A

Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S'. Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \geq R$.

Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là:

$$V = \frac{1}{3}h.S_{(C)} = \frac{1}{3}h.\pi.r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \frac{1}{3}\pi\left(-h^3 + 2h^2R\right).$$

Xét hàm số: $f(h) = -h^3 + 2h^2R$ với $h \in [R;2R)$.

Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0$ (loại) hoặc $h = \dfrac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	R		$\frac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	R^3	$\nearrow$	$\frac{32R^3}{27}$	$\searrow$	0

Ta có: $\max f(h) = \dfrac{32}{27}R^3$ tại $h = \dfrac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{32}{27}R^3 = \dfrac{32}{81}\pi R^3$ khi $h = \dfrac{4R}{3}$.

Chú ý: Sau khi tính được $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(-h^3 + 2h^2R\right)$ ta có thể làm như sau:

$V=\frac{1}{3}\pi\left(-h^3+2h^2R\right)=\frac{1}{3}\pi h^2\left(2R-h\right)=\frac{\pi}{6}.h.h\left(4R-2h\right)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81}$.

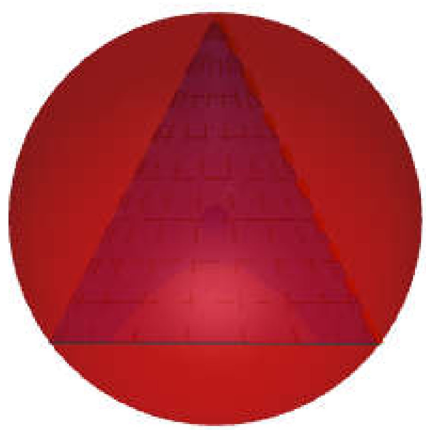
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $h=4R-2h\Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$.

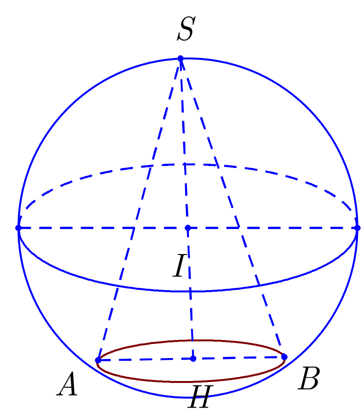
Câu 28: **(THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{81}{32}$. **B.** $\frac{76}{32}$. **C.** $\frac{32}{81}$. **D.** $\frac{32}{76}$.

Lời giải

Chọn D





Gọi I, S là tâm mặt cầu và đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Ta có $\frac{V_1}{V_2}+1=\frac{V}{V-V_1}$. Do đó để $\frac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.

TH 1: Xét trường hợp $SI\le R$

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SI=R$ Lúc đó $V_1=\frac{\pi R^3}{3}$.

TH 2: $(SI>R)I$ nằm trong tam giác SAB như hình vẽ.

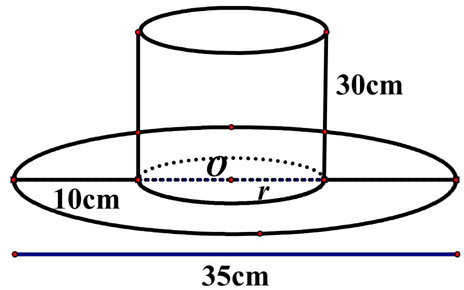
Đặt $IH=x\left(x>0\right)$. Ta có

$V_1=\frac{1}{3}\pi HA^2.SH=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)\left(R+x\right)=\frac{\pi}{6}\left(2R-2x\right)\left(R+x\right)\left(R+x\right)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{32\pi}{81}R^3$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{R}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V}{V-V_1}-1=\dfrac{\dfrac{4}{3}\pi R^3}{\dfrac{4}{3}\pi R^3-\dfrac{32}{81}\pi R^3}-1=\dfrac{8}{19}$.

Câu 29: **(THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018)** Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ dưới đây. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



A. $750,25\pi\ (\mathrm{cm}^2)$. **B.** $700\pi\ (\mathrm{cm}^2)$. **C.** $756,25\pi\ (\mathrm{cm}^2)$. **D.** $754,25\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có tổng diện tích vải cần để làm nên cái mũ là tổng diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hình tròn vành nón.

Ta có $r=\dfrac{15}{2}\mathrm{cm}\Rightarrow S_{xq}=2\pi rh=2\pi.\dfrac{15}{2}.30=450\pi\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

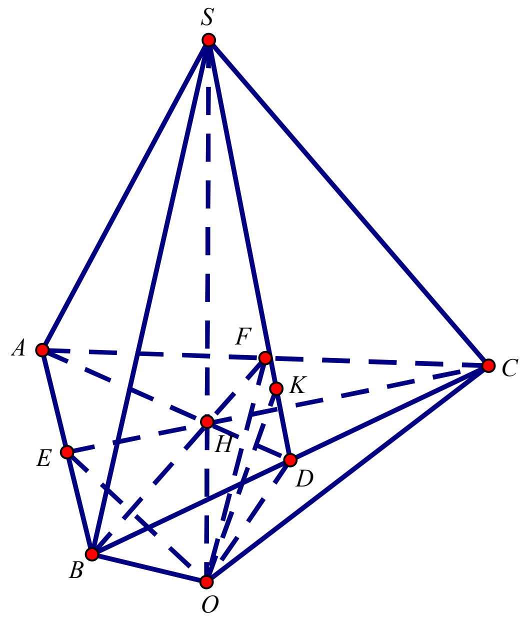
Diện tích vành nón là $\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2=\dfrac{1225\pi}{4}\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

Câu 30: Vậy diện tích vải cần dùng là $450\pi+\dfrac{1225\pi}{4}=\dfrac{3025}{4}\pi\approx756,25\pi\left(\mathrm{cm}^2\right)$.**(THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều, đường cao SH với H nằm trong ΔABC và 2SH=BC, (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Biết có một điểm O nằm trên đường cao SH sao cho $d(O;AB)=d(O;AC)=d(O;(SBC))=1$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\dfrac{256\pi}{81}$. **B.** $\dfrac{125\pi}{162}$. **C.** $\dfrac{500\pi}{81}$. **D.** $\dfrac{343\pi}{48}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử E,F là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB,AC. Khi đó ta có

$HE\perp AB, HF\perp AC$. Do $OE=OF=1$ nên $HE=HF$. Do đó AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
Khi đó $AH\cap BC=D$ là trung điểm của BC.

Do $BC\perp AD\Rightarrow BC\perp(SAD)$. Kẻ $OK\perp SD$ thì $OK\perp(SBC)$. Do đó $OK=1$ và $\widehat{SDA}=60°$.

Đặt $AB=BC=CA=2a\,(a>0)$ thì $SH=a, HD=a.\cot 60°=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Do đó $AD=a\sqrt{3}=3HD$ nên H là tâm tam giác đều $ABC\Rightarrow S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và E,F là trung điểm AB,AC.

Mặt khác trong tam giác SOK có : $SO=\dfrac{OK}{\sin 30°}=2$. Do ΔDEF đều có $OH\perp(DFE)$ nên

$OE=OF=OD=1\Rightarrow K\equiv D$.

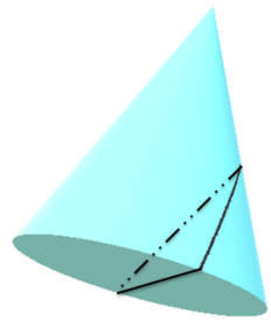
Khi đó ΔDSO vuông tại D và có $DH\perp SO$. Từ đó

$DH^2=HS.HO\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3}=a(2-a)\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow AB=3, SH=\dfrac{3}{2}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thì $R=\dfrac{SA^2}{2SH}=\dfrac{7}{4}$.

$V_{m/c}=\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{7}{4}\right)^3=\dfrac{343}{48}\pi$.

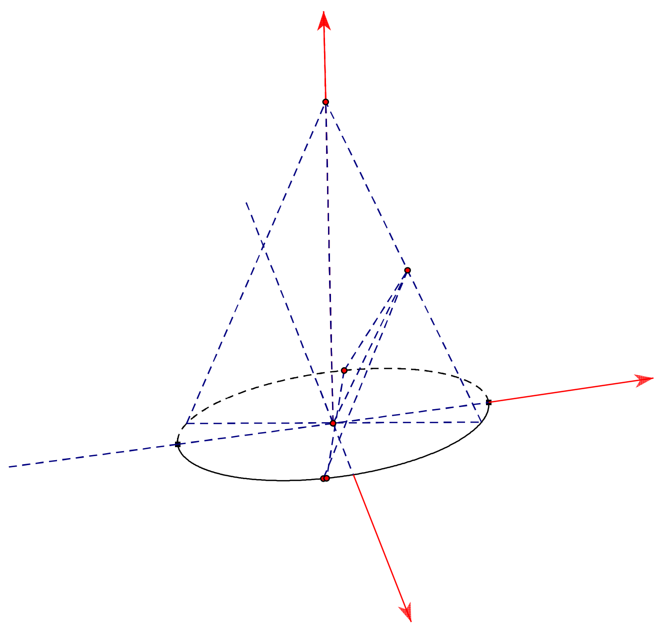
Câu 31: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 tính tỷ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α)?



A. $\dfrac{2}{\pi}$. **B.** $\dfrac{1}{2\left(\pi-1\right)}$. **C.** $\dfrac{2}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{3\pi-4}{6\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Không mất tính tổng quát ta giả sử $R=1$.

Khi cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 thì ta được thiết diện là một đường parabol có đỉnh là gốc $O\left(0;0\right)$ và đỉnh còn lại là $A\left(1;1\right)$, do đó thiết diện sẽ có diện tích là $S=\dfrac{4}{3}$. Xét mặt phẳng đi qua cạnh đáy của thiết diện vuông góc với hình tròn đáy của hình nón cắt hình nón làm đôi.

Gọi đa diện chứa mặt thiết diện đó là $\left(H\right)$. Gọi $\left(K\right)$ là đa diện chứa đỉnh O của hình nón được sinh bởi khi cắt thiết diện Parabol với đa diện $\left(H\right)$.

Khi đó khoảng cách từ O đến mặt thiết diện là $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích của đa diện $\left(K\right)$ là $V_K=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Mặt khác thể tích của nửa khối nón là $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}.\pi\sqrt{3}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích của đa diện nhỏ tạo bởi thiết diện và khối nón là $V=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}$.

Vậy tỉ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α) là $\frac{\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\pi-4}{6\pi}$.

Câu 32: (THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết rằng $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, $AC=BD=c$.

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

B. $\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.

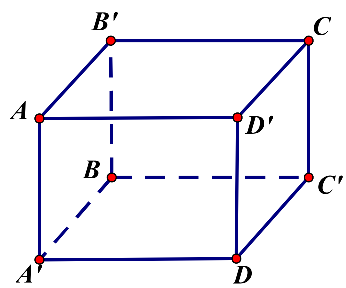
C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

Chọn C

Dựng hình hộp $AB'CD'.A'BC'D$



Xét mặt bên $CD'DC'$ là hình bình hành có $CD=AB=C'D'$ nên mặt bên $CD'DC'$ là hình chữ nhật. Tương tự ta có tất cả các mặt bên của hình hộp $AB'CD'.A'BC'D$ đều là các hình chữ nhật.
Do đó $AB'CD'.A'BC'D$ là hình hộp chữ nhật.
Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.
Kí hiệu $AB'=x, AD'=y, AA'=z$ thì ta có $x^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=c^2$, $z^2+y^2=b^2$.

Suy ra $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Do đó: $R=\frac{AC'}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

----------HẾT----------