Chủ đề 3. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Câu 1: **(SGD VĨNH PHÚC)**Gọi $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=t$ $(t>0)$. Tìm $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$.

A. $-\ln 2-\frac{1}{2}$. **B.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}-\ln 2$. **D.** $\ln 2+\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1:

*Tìm a,b,c sao cho $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{(x+2)^2}$

$$\Leftrightarrow 1=a(x+2)^2+(bx+c)(x+1)\Leftrightarrow 1=ax^2+4ax+4a+bx^2+bx+cx+c$$

$$\Leftrightarrow 1=(a+b)x^2+(4a+b+c)x+4a+c\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\4a+b+c=0\\4a+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-3\end{cases}.$$

*Vì trên $[0;t]$, $y=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}>0$ nên ta có:

Diện tích hình phẳng: $S(t)=\int\limits_0^t\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^t\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_0^t\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln\frac{x+1}{x+2}+\frac{1}{x+2}\right)\Bigg|_0^t$$

$$=\ln\frac{t+1}{t+2}+\frac{1}{t+2}+\ln 2-\frac{1}{2}.$$

*Vì $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t+2}\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)=0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t+2}=0$

Nên $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ln\frac{t+1}{t+2}+\frac{1}{t+2}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$.

Cách 2: Dùng Máy tính cầm tay.

Diện tích hình phẳng: $S(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x$

Cho $t=100$ ta bấm máy $=\int_0^{100}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x\approx 0{,}193$

Dùng máy tính kiểm tra 4 kết quả ta được đáp án B.

Câu 2: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho các tích phân $I=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan x}dx$ và $J=\int_0^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ với $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, khẳng định **sai** là

A. $I=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$.

B. $I-J=\ln\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$.

C. $I=\ln\left|1+\tan\alpha\right|$.

D. $I+J=\alpha$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ nên A đúng.

$I-J=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\alpha}\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\cos x+\sin x\right|\Big|_0^{\alpha}=\ln\left|\cos\alpha+\sin\alpha\right|$ B đúng

$I+J=\int_0^{\alpha}dx=x\Big|_0^{\alpha}=\alpha$ D đúng.

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hàm số $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)dt$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Tính $M-m$.

A. 18 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 9

Hướng dẫn giải

$f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)dt=\left(t^4-4t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{x}}=x^2-4x+3$, với $x\geq 0$.

$f'(x)=2x-4;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;6]$.

$f(0)=3;\ f(2)=-1;\ f(6)=15$. Suy ra $M=15, m=-1$. Suy ra $M-m=16$.

Đáp án: C.

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Giả sử $\int x(1-x)^{2017}\,\mathrm{d}x=\dfrac{(1-x)^a}{a}-\dfrac{(1-x)^b}{b}+C$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $2a-b$ bằng:

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int x(1-x)^{2017}\,\mathrm{d}x=\int(x-1+1)(1-x)^{2017}\,\mathrm{d}x=\int\left((1-x)^{2017}-(1-x)^{2018}\right)\mathrm{d}x=-\frac{(1-x)^{2018}}{2018}+\frac{(1-x)^{2019}}{2019}+C$$

Vậy $a=2019,b=2018\Rightarrow 2a-b=2020$.

Chọn D.

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^x+3}$ và $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x)+\ln\left(x^3+3\right)=2$ là:

A. $S=\{2\}$. **B.** $S=\{-2;2\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{-2;1\}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+3}=\dfrac{1}{3}\int\left(1-\dfrac{e^x}{e^x+3}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)+C$.

Do $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$ nên $C=0$. Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)$.

Do đó: $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2\Leftrightarrow x=2$

Chọn A.

Câu 6: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho $f(x),g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[2;6]$ và thỏa mãn $\int_2^3 f(x)dx=3;\int_3^6 f(x)dx=7;\int_3^6 g(x)dx=5$. Hãy tìm mệnh đề KHÔNG đúng.

A. $\int_3^6[3g(x)-f(x)]dx=8$

B. $\int_2^3[3f(x)-4]dx=5$

C. $\int_2^{\ln e^6}[2f(x)-1]dx=16$

D. $\int_3^{\ln e^6}[4f(x)-2g(x)]dx=16$

Hướng dẫn giải

$\int_2^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=\int_2^6 \mathrm{f}(x)dx=10$

Ta có: $\int_3^6 [3g(x)-f(x)]dx=3\int_3^6 g(x)dx-\int_3^6 f(x)dx=15-7=8$ nên A đúng

$\int_2^3 [3f(x)-4]dx=3\int_2^3 \mathrm{f}(x)dx-4\int_2^3 dx=9-4=5$ nên B đúng

$\int_2^{\ln e^6} [2f(x)-1]dx=\int_2^6 [2f(x)-1]dx=2\int_2^6 \mathrm{f}(x)dx-1\int_2^6 dx=20-4=16$ nên C đúng

$\int_3^{\ln e^6} [4f(x)-2g(x)]dx=\int_3^6 [4f(x)-2g(x)]dx=4\int_3^6 \mathrm{f}(x)dx-2\int_3^6 g(x)dx=28-10=18$

Nên D sai

Chọn đáp án D

Câu 7: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Giả sử $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Ta có $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$ nên

$$\left((ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C\right)'=(3ax^2+2bx+c)e^{2x}+2e^{2x}(ax^3+bx^2+cx+d)$$
$$=\left(2ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+2c)x+c+2d\right)e^{2x}$$
$$=(2x^3+5x^2-2x+4)e^{2x}$$

Do đó $\begin{cases}2a=2\\3a+2b=5\\2b+2c=-2\\c+2d=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-2\\d=3\end{cases}$. Vậy $a+b+c+d=3$.

Câu 8: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho biết $\int_{-1}^5 f(x)dx=15$. Tính giá trị của $P=\int_0^2 [f(5-3x)+7]\mathrm{d}x$

A. $P=15$ **B.** $P=37$ **C.** $P=27$ **D.** $P=19$

Hướng dẫn giải

Để tính P ta đặt $\begin{array}{l} t=5-3x\Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{3} \\ x=0\Rightarrow t=5 \\ x=2\Rightarrow t=-1 \end{array}$ nên

$$P=\int_{5}^{-1}[f(t)+7](-\frac{dt}{3})=\frac{1}{3}\int_{-1}^{5}[f(t)+7]\mathrm{dt}=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{5}f(t)dt+7\int_{-1}^{5}dt\right)$$

$$=\frac{1}{3}.15+\frac{1}{3}.7.(6)=19$$

chọn đáp án D

Câu 9: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hàm số $f(x)=a\sin 2x-b\cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$ và $\int_{a}^{b}adx=3$. Tính tổng $a+b$ bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

$$f'(x)=2a\cos 2x+2b\sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\Leftrightarrow -2a=-2\Leftrightarrow a=1$$

$$\int_{a}^{b}adx=\int_{1}^{b}dx=3\Leftrightarrow b-1=3\Leftrightarrow b=4$$

Vậy $a+b=1+4=5.$

Câu 10: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Biết rằng: $\int_{0}^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^{x}+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^{a}2+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}$. Trong đó a,b,c là những số nguyên. Khi đó $S=a+b-c$ bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\int_{0}^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^{x}+1}\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\ln 2}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{2e^{x}+1}\mathrm{d}x.$$

Tính $\int_{0}^{\ln 2}x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{2}}{2}\right|_{0}^{\ln 2}=\frac{\ln^{2}2}{2}$

Tính $\int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{2e^{x}+1}\mathrm{d}x$

Đặt $t=2e^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2e^x\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Đổi cận : $x=\ln 2\Rightarrow t=5, x=0\Rightarrow t=3$.

$\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{1}{2e^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\dfrac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=\int\limits_3^5\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)\Big|_3^5=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2-\ln\dfrac{5}{3}$.

$\int\limits_0^{\ln 2}\left(x+\dfrac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2-\ln\dfrac{5}{3}\Rightarrow a=2, b=1, c=-1$

Vậy $a+b-c=4$.

Câu 11: (LẠNG GIANG SỐ 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)$ và hai tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(3;-2)$ là

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{1}{2}(2x-4)=x-2$.

Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó, $y_0=\dfrac{1}{2}\left(x_0^2-4x_0+3\right)$ và $y'(x_0)=x_0-2$.

Phương trình của tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0)$ là

$$y=(x_0-2)(x-x_0)+\frac{1}{2}\left(x_0^2-4x_0+3\right)$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(3;-2)$ nên

$$-2=(x_0-2)(3-x_0)+\frac{1}{2}\left(x_0^2-4x_0+3\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y=-x+1\\ x_0=5\Rightarrow y=3x-11\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm

$$S=\left|\int_1^3\left[\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)-(-x+1)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_3^5\left[\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)-(3x-11)\right]\mathrm{d}x\right|=\frac{8}{3}$$

Câu 12: (LẠNG GIANG SỐ 1) Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với a, b là các số thực . Tính $16a-8b$

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{1+\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$. Ta có

$$I = \frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\text{d}x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

Do đó, $16a - 8b = 4$.

Câu 13: (LẠNG GIANG SỐ 1) Giả sử $\int\limits_0^1 f(x)\text{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(z)\text{d}z = 9$. Tổng $\int\limits_1^3 f(t)\text{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\text{d}t$ bằng

A. 12. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\text{d}x = 3 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(t)\text{d}t = 3$; $\int\limits_0^5 f(z)\text{d}z = 9 \Rightarrow \int\limits_0^5 f(t)\text{d}t = 9$

$$9 = \int\limits_0^5 f(t)\text{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\text{d}t + \int\limits_1^3 f(t)\text{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\text{d}t = 3 + \int\limits_1^3 f(t)\text{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\text{d}t$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\text{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\text{d}t = 6.$$

Câu 14: (LẠNG GIANG SỐ 1) Tích phân $\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{e^{2x+1}+1}{e^x}\text{d}x = e + \dfrac{a}{b}$. Tính tích $a.b$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\int\limits_0^{\ln 2}\frac{e^{2x+1}+1}{e^x}\text{d}x = \int\limits_0^{\ln 2} e^{x+1}\text{d}x + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}\text{d}x = \int\limits_0^{\ln 2} e^{x+1}\text{d}(x+1) - \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}\text{d}(-x)$$

$$= e^{(x+1)}\Big|_0^{\ln 2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = (2e - e) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = e + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow ab = 2.$$

Câu 15: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}\text{d}x = \dfrac{\pi^3}{a} + \dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

A. $a+b+c+d=28$. **B.** $a+b+c+d=16$. **C.** $a+b+c+d=14$. **D.** $a+b+c+d=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x}{1+x^6-x^6}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin xdx.$$

Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin(-t)(-dt)=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin tdt=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}+x^3\right)\sin xdx$$

Suy ra $2I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-2x^3\sin x\right)dx\Leftrightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^3\sin xdx$.

$$\begin{array}{ccc} x^3 & \xrightarrow{(+)} & +\sin x\\ 3x^2 & \xrightarrow{(-)} & -\cos x\\ 6x & \xrightarrow{(+)} & -\sin x\\ 6 & \xrightarrow{(-)} & +\cos x\\ 0 & & +\sin x\end{array}$$

$$I=\left(-x^3\sin x+3x^2\cos x+6x\sin x-6\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^3}{27}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{3}-2\pi+6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a=27, b=-3, c=-2, d=6$. Vậy $a+b+c+d=28$.

Câu 16: (NGÔ GIA TỰ - VP) Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^a\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-3\sin x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: + Với $x=0\Rightarrow t=2$

+ Với $x=a\Rightarrow t=\sqrt{1+3\cos a}=A.$

Khi đó $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int_A^2 \frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}t\Big|_A^2=\frac{2}{3}(2-A)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow A=1\Rightarrow\sqrt{1+3\cos a}=1\Rightarrow\cos a=0$

$\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. Do $a\in\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le k\le\frac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\end{array}\right.$.

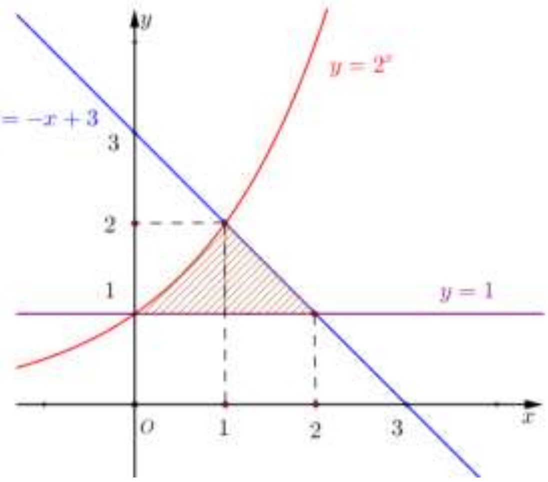
Bình luận: Khi cho $a=\frac{\pi}{2}+\pi$ thì tích phân không xác định vì mẫu thức không xác định (trong căn bị âm). Vậy đáp án phải là B, nghĩa là chỉ chấp nhận $a=\frac{\pi}{2}$.

Câu 17: (NGÔ GIA TỰ - VP) Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=2^x$, $y=-x+3$ và $y=1$ là:

A. $S=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$. **B.** $S=\frac{1}{\ln 2}+1$. **C.** $S=\frac{47}{50}$. **D.** $S=\frac{1}{\ln 2}+3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường. Ta có:

- $2^x=-x+3\Leftrightarrow x=1$
- $2^x=1\Leftrightarrow x=0$
- $-x+3=1\Leftrightarrow x=2$

Diện tích cần tìm là: $S=\int_0^1\left(2^x-1\right)dx+\int_1^2(-x+3-1)dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{-x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$

Câu 18: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Có bao nhiêu số $a\in(0;20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x\sin 2x dx=\frac{2}{7}$.

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_0^a \sin^5 x\sin 2xdx = 2\int_0^a \sin^6 x\cos xdx = 2\int_0^a \sin^6 xd(\sin x) = \frac{2}{7}\sin^7 x\Big|_0^a = \frac{2}{7}\sin^7 a = \frac{2}{7}$.

Do đó $\sin^7 a = 1 \Leftrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vì $a \in (0;20\pi)$ nên $0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 10$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên có 10 giá trị của k

Câu 19: (THTT – 477) Giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** e. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $I = \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$

Đặt $t = 1+e^x \Rightarrow \mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: Khi $x = n \Rightarrow t = 1+e^n; x = n+1 \Rightarrow t = 1+e^{n+1}$

Khi đó: $I = \int_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} \frac{1}{t(t-1)}\mathrm{d}t = \int_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \left(\ln|t-1| - \ln|t|\right)\Big|_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} = 1 + \ln\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}$

Mà $\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{e}\right)^n + e} \to \frac{1}{e}$ khi $n \to +\infty$, Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} I = 1 + \ln\frac{1}{e} = 0$

Câu 20: (THTT – 477) Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x\cos xdx = \frac{1}{64}$ thì n bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

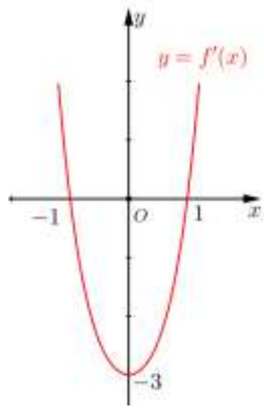
Chọn A.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos xdx$. Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{64}$.

Suy ra $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{64}$ có nghiệm duy nhất $n = 3$ (tính đơn điệu).

Câu 21: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{27}{4}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 3)dx = x^3 - 3x + C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$

Suy ra $f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$

Xét phương trình $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx = \frac{27}{4}$.

Câu 22: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_{1}^{3} f(-2x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$

A. $I = 11$. **B.** $I = 5$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$

$\int\limits_{1}^{3} f(-2x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{3} f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Xét tích phân $K = \int\limits_{1}^{3} f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow u = 2;\ x = 3 \Rightarrow u = 6$.

$K = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{6} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int\limits_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 6$

Vậy $I = \int\limits_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 8 + 6 = 14.$

Câu 23: (SỞ GD HÀ NỘI) Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c\ (a,b,c \in \mathbb{R})$. Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T = 6$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = 10$. **D.** $T = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x \Rightarrow 2tdt = 3dx$

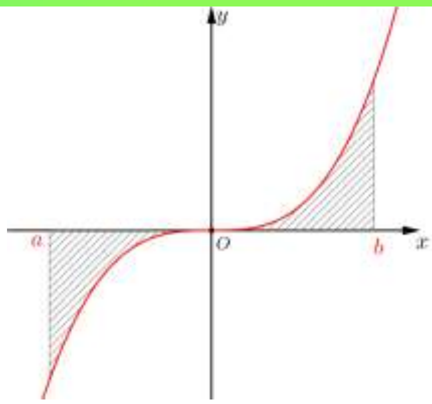
Đổi cận: + $x = 0 \Rightarrow t = 1$

+ $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx = 2\int_1^2 te^t dt = 2\left(te^t\Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt\right) = 2\left(te^t\Big|_1^2 - e^t\Big|_1^2\right) = 2\left(2e^2 - e - e^2 + e\right) = 2e^2.$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = c = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 10$ nên câu C đúng.

Câu 24: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

A. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O(0;0)$
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị (C) ở trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$

+ Do đó: $S_D = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^0 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^b |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$

Câu 25: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}dx = 4 + a\ln 2 + b\ln 5$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - b$.

A. $S = 9$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2 \frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5 \frac{2x-3}{x}dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)dx+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)dx=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5$$

$$=8\ln 2-3\ln 5+4\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=11.$$

Câu 26: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 3-c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=60$. **B.** $S=70$. **C.** $S=72$. **D.** $S=68$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x$

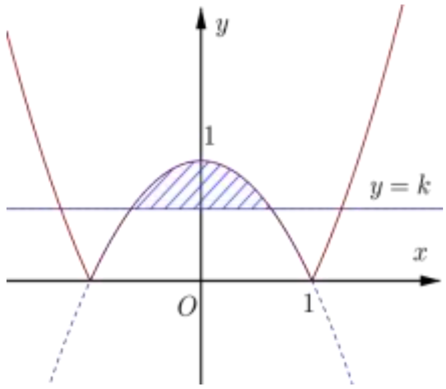
Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

$$I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)dx=\frac{x^2\ln(2x+1)}{2}\Bigg|_0^4-\int\limits_0^4\frac{x^2}{2x+1}dx$$

$$=8\ln 9-\int\limits_0^4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x+1)}\right)dx=16\ln 3-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln|2x+1|\right)\Bigg|_0^4=\frac{63}{4}\ln 3-3$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}\ln 3-c=\frac{63}{4}\ln 3-3\Rightarrow\begin{cases}a=63\\b=4\\c=3\end{cases}\Rightarrow S=70.$$

Câu 27: (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-1\right|$ và $y=k, 0<k<1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.



A. $k=\sqrt[3]{4}$.

B. $k=\sqrt[3]{2}-1$.

C. $k=\frac{1}{2}$.

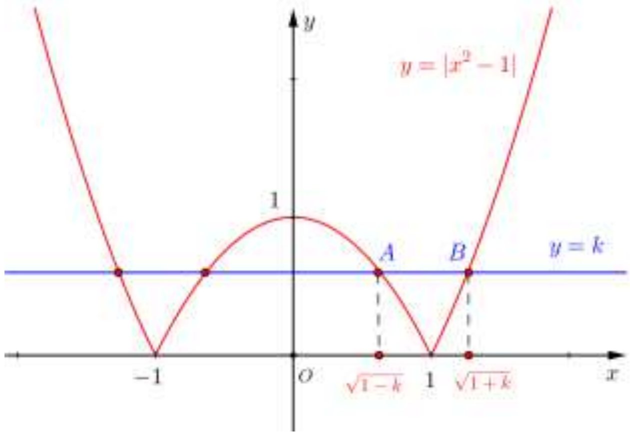
D. $k=\sqrt[3]{4}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2, y=k, x=0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y=1-x^2, y=x^2-1, y=k, x>0.$



$$\int_0^{\sqrt{1-k}}\left(1-x^2-k\right)dx=\int_{\sqrt{1-k}}^{1}\left(k-1+x^2\right)dx+\int_1^{\sqrt{1+k}}\left(k-x^2+1\right)dx \Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k}-\frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}$$

$$=\frac{1}{3}-(1-k)-\frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}+(1-k)\sqrt{1-k}+(1+k)\sqrt{1+k}-\frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k}-(1+k)+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+k}\right)^3=2 \Leftrightarrow k=\sqrt[3]{4}-1.$$

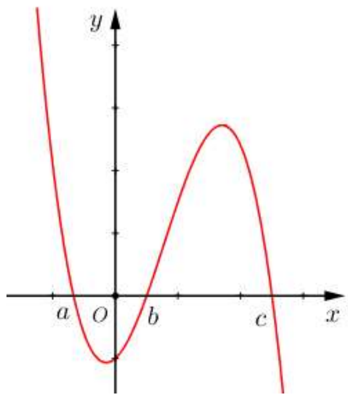
Câu 28: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b).$

B. $f(c)>f(b)>f(a).$

C. $f(a)>f(b)>f(c).$

D. $f(b)>f(a)>f(c).$



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a;b]$ và $[b;c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ là:

$$S_1 = \int_a^b |f'(x)|dx = -\int_a^b f'(x)dx = -f(x)\Big|_a^b = f(a) - f(b).$$

Vì $S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ (1)

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ là:

$$S_2 = \int_b^c |f'(x)|dx = \int_b^c f'(x)dx = f(x)\Big|_b^c = f(c) - f(b).$$

$S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b)$ (2).

Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta **chọn đáp án A.**

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a;b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b;c]$).

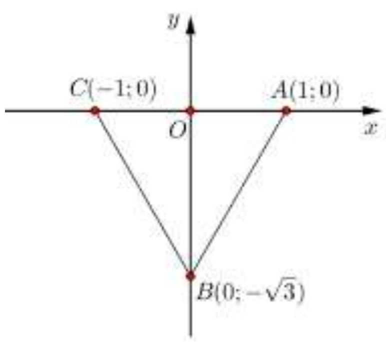
Câu 29: Cho tam giác đều ABC có diện tích bằng $\sqrt{3}$ quay xung quanh cạnh AC của nó. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V = 2\pi$. **B.** $V = \pi$. **C.** $V = \frac{7}{4}\pi$. **D.** $V = \frac{7}{8}\pi$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

$S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = BC = CA = 2$. Chọn hệ trục vuông góc Oxy sao cho $O\ 0;0$, $A\ 1;0$, $B\ 0;-\sqrt{3}$ với O là trung điểm AC.



Phương trình đường thẳng AB là $y = \sqrt{3}\ x - 1$, thể tích khối tròn xoay khi quay ABO quanh trục AC (trùng Ox) tính bởi

$V' = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{3}\ \ x - 1\ \ dx = \pi$. Vậy thể tích cần tìm $V = 2V' = 2\pi$.

Câu 30: Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}.\cos x}{1+2^x}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{1+2^x\ \ .2}\mathrm{d}x - \int\limits_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{1+2^x\ \ .2}\mathrm{d}x\ \ 1$

Đặt $x = -t$ ta có $x = 0$ thì $t = 0, \mathrm{x} = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$ và $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{1+2^x\ \ .2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t}\cos\ \ -t}{1+2^{-t}\ \ .2}\mathrm{d}\ \ -t\ \ = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+2^t\ \ .2}\mathrm{d}t = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2^x\ \ .2}\mathrm{d}x$$

Thay vào (1) có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{1+2^x\ \ .2}\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2^x\ \ .2}dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2^x\ \ \cos x}{1+2^x\ \ .2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\,\mathrm{cosx}}{1+2^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Câu 31: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = 10$. $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

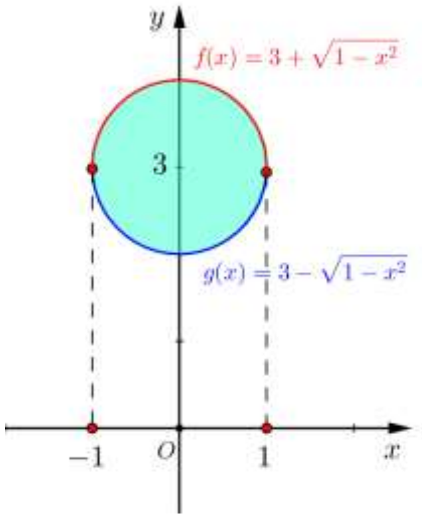
- Ta có $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+3\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=10$.
- Tương tự $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=6$.
- Xét hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases}$, trong đó $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.
- Khi đó $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

Câu 32: (PHAN ĐÌNH PHÙNG) Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

A. $V=6\pi$. **B.** $V=6\pi^3$. **C.** $V=3\pi^2$. **D.** $V=6\pi^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



$x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow y=3\pm\sqrt{1-x^2}$.

$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=12\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Đặt $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t.dt$. Với $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=-11 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow V=12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt=12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=6\pi^2$.

Câu 33: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=7$. Để diện tích elip (E) gấp 7 lần diện tích hình tròn (C) khi đó

A. $ab=7$. **B.** $ab=7\sqrt{7}$. **C.** $ab=\sqrt{7}$. **D.** $ab=49$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0) \Rightarrow y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Diện tích (E) là $S_{(E)}=4\int_0^a \dfrac{b\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x}{a}=4\dfrac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $x=a\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow \mathrm{t}=0; x=a\Rightarrow \mathrm{t}=\dfrac{\pi}{2}$

$$S_{(E)}=4\frac{b}{a}\int_0^a \mathrm{a}^2.\cos^2\mathrm{t}\mathrm{d}\mathrm{t}=2ab\int_0^a\left(1+\cos 2\mathrm{t}\right)\mathrm{d}\mathrm{t}=\pi ab$$

Mà ta có $S_{(C)}=\pi.R^2=7\pi.$

Theo giả thiết ta có $S_{(E)}=7.S_{(C)}\Leftrightarrow \pi ab=49\pi\Leftrightarrow ab=49.$

Câu 34: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Giả sử tích phân $\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{c}\ln 3$. Với phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

A. $b+c=6057.$ **B.** $b+c=6059.$ **C.** $b+c=6058.$ **D.** $b+c=6056.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $I=\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\mathrm{d}x=2017\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2x+1\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(\ln\left(2x+1\right)\right)\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\left(\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}\right)\dfrac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{8}\ln 3-\left(\frac{x^2-x}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}\ln 3$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\mathrm{d}x=2017\left(\frac{3}{8}\ln 3\right)=\frac{6051}{8}\ln 3.$$

Khi đó $b+c=6059.$

Câu 35: (NGÔ QUYỀN – HP) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2,\ mx=\dfrac{1}{2}y^2,\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

A. $m=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $m=2.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=\dfrac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $2my = x^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2m}x^2 > 0$ (do $m > 0$).

và $mx = \dfrac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2mx} \ge 0 \\ y = -\sqrt{2mx} < 0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $2my = x^2$ và $mx = \dfrac{1}{2}y^2$ ta có

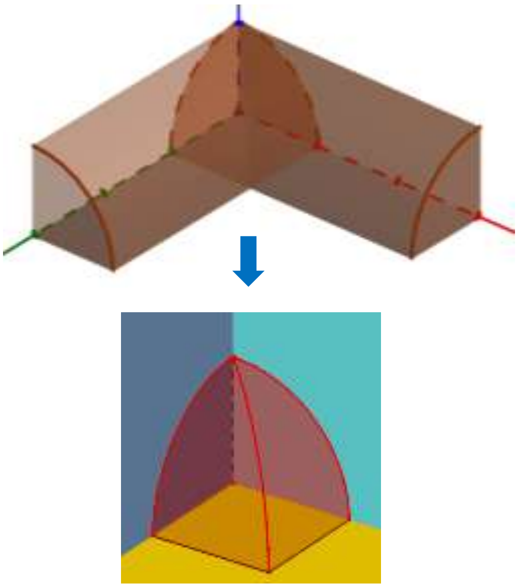
$\dfrac{1}{2m}x^2 = \sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^2 = 2m\sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^4 - 8m^3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Khi đó $S = \displaystyle\int_0^{2m} \left|\dfrac{1}{2m}x^2 - \sqrt{2mx}\right| \mathrm{d}x = \left|\int_0^{2m} \left(\dfrac{1}{2m}x^2 - \sqrt{2mx}\right)\mathrm{d}x\right|$

$= \left|\left(\dfrac{1}{2m}.\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2\sqrt{2m}}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^{2m}\right| = \dfrac{4m^2}{3}$.

Để $S = 3 \Leftrightarrow \dfrac{4m^2}{3} = 3 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (do $m > 0$).

Câu 36: (CHUYÊN KHTN L4) Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H).



A. $V_{(H)} = \dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)} = \dfrac{3a^3}{4}$.

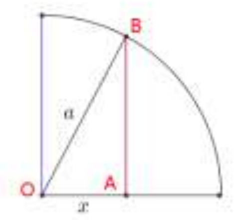
C. $V_{(H)} = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)} = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

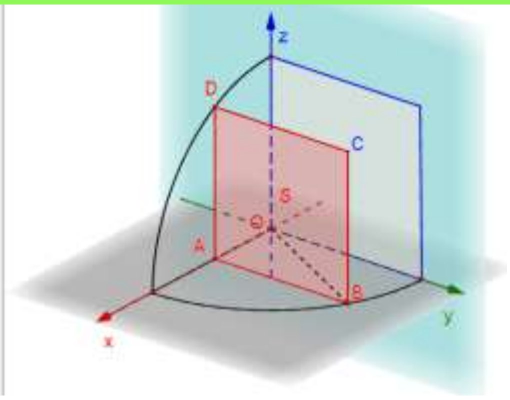
Hướng dẫn giải

Chọn đáp án A.

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

Thể tích khối (H) là $\displaystyle\int_0^a S(x)dx = \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \dfrac{2a^3}{3}$.





Câu 37: (CHUYÊN KHTN L4) Với các số nguyên a,b thỏa mãn $\int\limits_1^2 (2x+1)\ln x\mathrm{d}x = a+\frac{3}{2}+\ln b$.

Tính tổng $P=a+b$.

A. $P=27$. **B.** $P=28$. **C.** $P=60$. **D.** $P=61$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

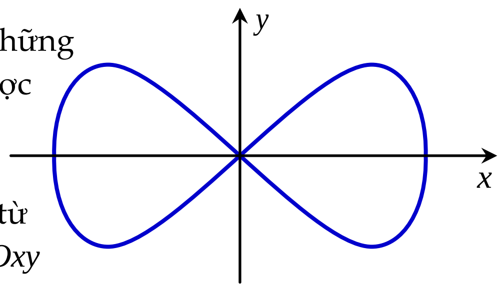
Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=(2x+1)\mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=x^2+x \end{cases}$

$$\int\limits_1^2 (2x+1)\ln x\mathrm{d}x = \left(x^2+x\right)\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(x^2+x\right).\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=6\ln 2-\int\limits_1^2 (x+1)\mathrm{d}x = 6\ln 2-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2 = 6\ln 2-\left(4-\frac{3}{2}\right) = -4+\frac{3}{2}+\ln 64$$

$P=a+b=-4+64=60$.

Câu 38: **(CHUYÊN VINH – L2)** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S=\frac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S=\frac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S=\frac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

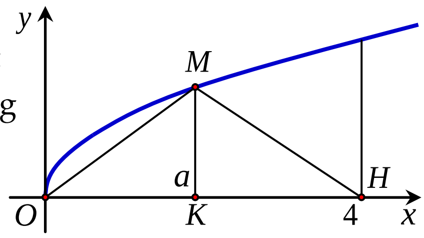
Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

Câu 39: **(CHUYÊN VINH – L2)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$

Theo đề bài $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

Câu 40: **(CHUYÊN VINH – L2)** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $k=-4$. **B.** $k=-8$. **C.** $k=-6$. **D.** $k=-2$.

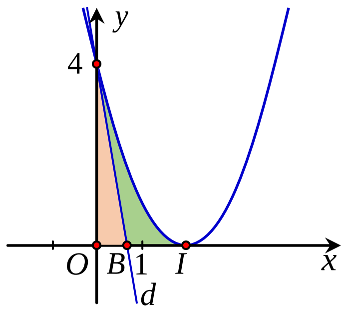
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$ và trục hoành là: $x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành là: $S=\int\limits_0^2 \left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\right|_0^2=\dfrac{8}{3}$.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có dạng: $y=kx+4$.



Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(\dfrac{-4}{k};0\right)$.

Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $B\in OI$ và $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}S=\dfrac{4}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<\dfrac{-4}{k}<2 \\ S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.4.\dfrac{-4}{k}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k<-2 \\ k=-6 \end{cases} \Leftrightarrow k=-6.$$

Câu 41: **(CHUYÊN TUYÊN QUANG –L1)** Tính tích phân $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}} \dfrac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$. Với a, b, c là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a+b^2+c^4$ có giá trị bằng

A. 20. **B.** 241. **C.** 196. **D.** 48.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \dfrac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \left(-4+\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right)\mathrm{d}x=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x+\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=I+J$.

Tính $I=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x=\left.-4x\right|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4$.

Tính $J=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$. Khi $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $J = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t = \sqrt{2}\tan u \Rightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(1 + \tan^2 u\right)\mathrm{d}u$. Khi $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = \sqrt{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

Suy ra $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4 + x^2 - 3}{x^4 + 1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3} - 16 + \pi\right) + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = b = -16 \\ c = 1 \end{cases}$.

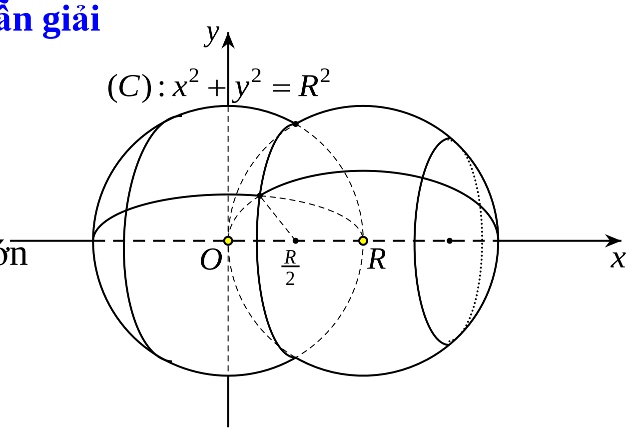
Vậy $a + b^2 + c^4 = 241$.

Câu 42: **(CHU VĂN AN – HN)** Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = \frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

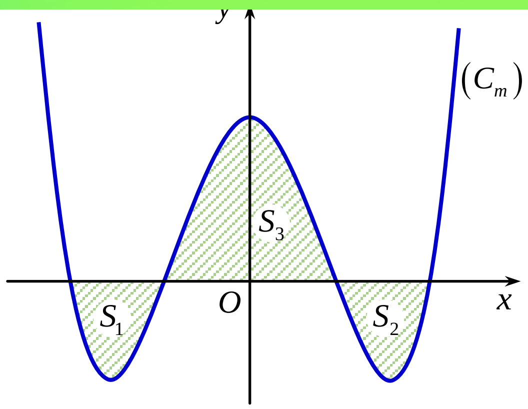
Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2 + y^2 = R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V = 2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

Câu 43: `**(CHU VĂN AN – HN)** Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ :



Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1+S_2=S_3$.

A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=-\frac{5}{4}$. **C.** $m=\frac{5}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $x=b$ là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4-3x^2+m=0$. Khi đó ta có

$$b^4-3b^2+m=0 \ (1)$$

Nếu xảy ra $S_1+S_2=S_3$ thì

$$\int_0^b \left(x^4-3x^2+m\right)\mathrm{d}x=0 \Rightarrow \frac{b^5}{5}-b^3+mb=0 \Rightarrow \frac{b^4}{5}-b^2+m=0 \ (2) \ \left(\text{do } b>0\right)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4-2b^2=0 \Rightarrow b^2=\frac{5}{2}$ (do $b>0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m=\frac{5}{4}$.