Chủ đề 1.1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.
   - Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
   - Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
2. ***Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
   - Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in K$.
   - Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \le 0, \forall x \in K$.
3. ***Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
   - Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.
   - Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.
   - Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

   Chú ý.
   - ♦ Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết " Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.
   - ♦ Nếu $f'(x) \ge 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \le 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. ***Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$***

   Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.
   Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.
   Bước 3. Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

2. ***Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định***

   Bước 1. Tìm tập xác định ***D***.
   Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
   Bước 3. Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.
   Bước 4. Lập bảng biến thiên.
   Bước 5. Kết luận.

3. ***Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước.***

   Cho hàm số $y = f(x, m)$ có tập xác định D, khoảng $(a;b) \subset D$:
   - Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (a;b)$
   - Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (a;b)$

Chú ý: Riêng hàm số đa thức thì :

- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (a;b)$
- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (a;b)$

* <u>Nhắc lại một số kiến thức liên quan</u>:

Cho tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$

a) $g(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ b) $g(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

c) $g(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ d) $g(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu gặp bài toán tìm m để hàm số đồng biến (*hoặc nghịch biến*) trên khoảng $(a;b)$:

✓ *<u>Bước 1</u>*: Đưa bất phương trình $f'(x) > 0$ (*hoặc* $f'(x) < 0$), $\forall x \in (a;b)$ về dạng $g(x) > h(m)$ (hoặc $g(x) < h(m)$), $\forall x \in (a;b)$.

✓ *<u>Bước 2</u>*: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(a;b)$.

✓ *<u>Bước 3</u>*: Từ bảng biến thiên và các điều kiện thích hợp ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số m.

4. *Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình:*

Đưa phương trình, hoặc bất phương trình về dạng $f(x) = m$ hoặc $f(x) \ge g(m)$, lập bảng biến thiên của $f(x)$, dựa vào BBT suy ra kết luận.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1),(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1),\ (1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1),(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 10$ và các khoảng sau:

(I): $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$; (II): $\left(-\sqrt{2};0\right)$; (III): $\left(0;\sqrt{2}\right)$;

Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. Chỉ (I). **B.** (I) và (II). **C.** (II) và (III). **D.** (I) và (III).

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2),(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

Câu 5. Hỏi hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$.
B. $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.
C. $f(x)=-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3-x$.
D. $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 6. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$, $(2;+\infty)$.
B. $(-4;2)$.
C. $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$.
D. $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 7. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+5x-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(5;+\infty)$
B. $(2;3)$
C. $(-\infty;1)$
D. $(1;5)$

Câu 8. Hỏi hàm số $y=\frac{3}{5}x^5-3x^4+3x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0),(1;3)$.
B. $(1;3)$.
C. $\mathbb{R}$.
D. $(-\infty;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b- \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b- \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a<0; b- \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} a=b=c=0 \\ a<0; b- \end{array}\right.$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\frac{x}{2}+\sin^2 x$, $x\in[0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.
B. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.
C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.
D. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14. Cho các hàm số sau:

(I) : $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; (II) : $y = \frac{x-1}{x+1}$; (III) : $y = \sqrt{x^2 + 4}$

(IV) : $y = x^3 + 4x - \sin x$; (V) : $y = x^4 + x^2 + 2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 15. Cho các hàm số sau:

(I) : $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$; (II) : $y = \sin x - 2x$;

(III) : $y = -\sqrt{x^3 + 2}$; (IV) : $y = \frac{x-2}{1-x}$

Hỏi hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. (I), (II). **B.** (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV). **D.** (II), (III).

Câu 16. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 17. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=\cos 2x+\sin 2x.\tan x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m>3$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\le 1$. **D.** $m<1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

$y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $-3<m<1$. **D.** $m\le -3;\, m\ge 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^2-(m+1)x+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<2$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\le 1$. **B.** $m>\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m|\ge 1$. **D.** $m<\frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\le m\le \frac{2}{3}$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $\begin{cases} m>3 \\ m\ne 1\end{cases}$. **D.** $m\le 2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

$y=2x^3-3(m+2)x^2+6(m+1)x-3m+5$

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=-5$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-6$.

Câu 27. Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y=\dfrac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=0$. **D.** Không có m.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2<m<2$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $-2<m\le -1$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 0$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\ge 12$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2,+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài đúng bằng 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. $1\le m<2$. **B.** $m\le 0;1\le m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\le 0$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$.

Câu 34. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$ biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. Hai. **B.** Bốn. **C.** Vô số. **D.** Không có.

Câu 36. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)x^2 - \frac{3}{2}x\sin\alpha\cos\alpha - \sqrt{\beta - 2}$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \geq 2$.

B. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \geq 2$.

C. $\alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \geq 2$.

D. $\alpha \geq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \geq 2$.

Câu 38. Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a\sin x + b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. **B.** $a + 2b = 2\sqrt{3}$. **C.** $a^2 + b^2 \leq 4$. **D.** $a + 2b \geq \frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x - m = 0$ có đúng 1 nghiệm?

A. $-27 \leq m \leq 5$. **B.** $m < -5$ hoặc $m > 27$.

C. $m < -27$ hoặc $m > 5$. **D.** $-5 \leq m \leq 27$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

A. $m \geq 2$. **B.** $m \leq 2$. **C.** $m \geq 3$. **D.** $m \leq 3$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \leq m \leq 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \leq m < 3$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \geq 0$?

A. $m \leq -1$. **B.** $m \leq -\frac{4}{7}$. **C.** $m \geq -\frac{3}{7}$. **D.** $m \geq -1$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $-1 \leq m \leq 3$. **B.** $0 \leq m \leq 2$. **C.** $0 \leq m \leq 3$. **D.** $-1 \leq m \leq 2$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

A. $m \geq -\frac{7}{2}$. **B.** $m \geq \frac{3}{2}$. **C.** $m \geq \frac{9}{2}$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ có hai nghiệm thực?

A. $\frac{1}{3} \le m < 1$. **B.** $-1 \le m \le \frac{1}{4}$. **C.** $-2 < m \le \frac{1}{3}$. **D.** $0 \le m < \frac{1}{3}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x - 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2};3\right]$?

A. $m > 1$. **B.** $m > 0$. **C.** $m < 1$. **D.** $m < 0$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$?

A. $m \le 6$. **B.** $m \ge 6$. **C.** $m \ge 6\sqrt{2} - 4$. **D.** $m \le 6\sqrt{2} - 4$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \le m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3, 6]$?

A. $m \ge -1$. **B.** $-1 \le m \le 0$.

C. $0 \le m \le 2$. **D.** $m \le -1$ hoặc $m \ge 2$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \le 3$. **B.** $m \ge 1$. **C.** $-1 \le m \le 4$. **D.** $m \ge 0$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3 + 3mx - 2 < -\frac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x \ge 1$?

A. $m < \frac{2}{3}$. **B.** $m \ge \frac{2}{3}$. **C.** $m \ge \frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3} \le m \le \frac{3}{2}$.

Câu 51. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} \ge m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m = 4$. **B.** $m = 8$. **C.** $m = 12$. **D.** $m = 16$.

Câu 52. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 53. Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b - a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	D	B	C	D	D	B	A	B	B	A	A	C	A	A	B	C	C	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	B	B	C	C	D	B	C	C	B

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53							
B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	A							

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}>0,\ \forall x\neq 1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 2. Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 3. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=-4x^3+8x=4x(2-x^2)$. Giải $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 4. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có $y'=-\dfrac{10}{(-4+2x)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Câu 5. Chọn **C.**

Ta có: $f'(x)=-4x^4+4x^2-1=-(2x^2-1)^2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 6. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $y'=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$. Giải $y'=0\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.$

y' không xác định khi $x=-1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-1)$ và $(-1;2)$

Câu 7. Chọn **D.**

TXĐ: D $=\mathbb{R}$. $y'=x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$

Trên khoảng $(1;5)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến

Câu 8. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^4-12x^3+12x^2=3x^2(x-2)^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 9. Chọn **A.**

$$y'=3ax^2+2bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\ a>0;b^2-3ac\leq 0\end{array}\right.$$

Câu 10. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do $y'=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$ nên hàm số **không** đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11. Chọn **B.**

HSXĐ: $3x^2-x^3\geq 0\Leftrightarrow x\leq 3$ suy ra $D=(-\infty;3]$. $y'=\dfrac{6x-3x^2}{2\sqrt{3x^2-x^3}}$, $\forall x\in(-\infty;3)$.

Giải $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$. y' không xác định khi $\begin{cases}x=0\\ x=3\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖
y	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0

Hàm số nghịch biến $(-\infty;0)$ và $(2;3)$. Hàm số đồng biến $(0;2)$

Câu 12. Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=\frac{1}{2}+\sin 2x$. Giải $y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$, $(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x=\dfrac{7\pi}{12}$ và $x=\dfrac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
y		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$

Câu 13. Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$; $y'=1-\sin 2x\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 14. Chọn **C.**

(I): $y'=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(II): $y' = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \neq -1$ (III): $y' = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

(IV): $y' = 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (V): $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2+1)$

Câu 15. Chọn **A.**

(I): $y' = (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(II): $y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

(III) $y' = -\left(\sqrt{x^3+2}\right)' = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} \le 0, \forall x \in \left(-\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$;

(IV) $y' = \left(\dfrac{x-2}{1-x}\right)' = \left(\dfrac{x-2}{-x+1}\right)' = -\dfrac{1}{(1-x)^2} < 0,\ \forall x \neq 1$

Câu 16. Chọn **A.**

(I) $y' = \left(-(x-1)^3\right)' = -3(x-1)^2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $y' = \left(\ln(x-1) - \dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{x}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$

(III) $y' = \dfrac{1.\sqrt{x^2+1} - x.\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1} = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 17. Chọn **B.**

$y' = \begin{cases} 2x-1 & khi \quad x \ge -1 \\ -2x+1 & khi \quad x < -1 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Câu 18. Chọn **C.**

TXĐ: $D = (-\infty; 2]$. Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{2-x} - 1}{\sqrt{2-x}}$, $\forall x \in (-\infty; 2)$.

Giải $y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$; y' không xác định khi $x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2
y'		$+$	0	$-$	$\|$
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	5

Câu 19. Chọn **C.**

Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $y=\cos 2x+\sin 2x.\tan x=\frac{\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x}{\cos x}=1\Rightarrow y'=0$

Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 20. Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=\frac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\neq -1\Leftrightarrow m<1$

Câu 21. Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\ \ (hn)\\ m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1$

Câu 22. Chọn **B.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\frac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1\ge 0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow\begin{cases}1\ge 0\ (hn)\\ m-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 1$

Câu 23. Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=1-m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\sin x\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=0$ ta có $0\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m>0$ ta có $\sin x\le\frac{1}{m},\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{m}\ge 1\Leftrightarrow m\le 1$

Trường hợp 3: $m<0$ ta có $\sin x\ge\frac{1}{m},\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{m}\le -1\Leftrightarrow m\ge -1$

Vậy $|m|\le 1$

Câu 24. Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=m-3+(2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(2m+1)\sin x\le 3-m,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=-\frac{1}{2}$ ta có $0\le\frac{7}{2},\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m<-\frac{1}{2}$ ta có $\sin x\ge\frac{3-m}{2m+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3-m}{2m+1}\le -1$

$\Leftrightarrow 3-m\ge -2m-1\Leftrightarrow m\ge -4$

Trường hợp 3: $m>-\frac{1}{2}$ ta có:

$\sin x \le \dfrac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{3-m}{2m+1} \ge 1 \Leftrightarrow 3-m \ge 2m+1 \Leftrightarrow m \le \dfrac{2}{3}$. Vậy $m \in \left[-4; \dfrac{2}{3}\right]$

Câu 25. Chọn **A.**

Tính nhanh, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6(m+2)x+6(m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm kép khi $m=0$, suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Trường hợp $m \ne 0$, phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa yêu cầu bài toán).

Câu 26. Chọn **C.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2+2mx-m$
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0\,(hn) \\ m^2+m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m=-1$

Câu 27. Chọn **D.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2+3m+2}{(x+m)^2}$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y'<0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2+3m+2<0 \Leftrightarrow -2<m<-1$

Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2;-1)$.

Câu 28. Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$. Để hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow y'<0, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ 1 \le -m \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le -1$

Câu 29. Chọn **D.**

Cách 1: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

- Trường hợp 1:

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3>0\,(hn) \\ 36-3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 12$

- Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1<x_2 \le 0$ (*)

  ✓ Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa (*))

  ✓ Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36-3m>0 \\ 4<0\,(vl) \\ \dfrac{m}{3}>0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m. \text{Vậy } m \ge 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m \ge 12x - 3x^2 = g(x),\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Câu 30. Chọn **B.**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \ge m,\ \forall x \in (1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		$+$	0
g	2	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le 2$.

Câu 31. Chọn **A.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 9 \end{array}\right.$$

Câu 32. Chọn **B.**

+) Điều kiện $\tan x \ne m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ là $m \notin (0;1)$

+) $y' = \dfrac{2-m}{\cos^2 x(\tan x - m)^2}$.

+) Ta thấy: $\dfrac{1}{\cos^2 x(\tan x - m)^2} > 0 \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right); m \notin (0;1)$

+) Để hs đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 > 0 \\ m \le 0; m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$

Câu 33. Chọn **B.**

Tập xác định $D = \mathbf{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2 + 14mx + 14 \le 0, \forall x \ge 1$, tương đương với $g(x) = \dfrac{-14}{x^2 + 14x} \ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x \ge 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{15}$

Kết luận: (1) $\Leftrightarrow \min\limits_{x\geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15} \geq m$

Câu 34. Chọn **C.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \leq x^2 \pm \dfrac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 35. Chọn **C.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x \in D$.

Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)} = -m^2+m+2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$

Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của *m* thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. Chọn **D.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

Vì $\Delta'_g = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2-6m+1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3-2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của *m* thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37. Chọn **B.**

Điều kiện xác định: $\beta \geq 2$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\dfrac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1$

Kết luận: $\dfrac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $\beta \geq 2$.

Câu 38. Chọn **C.**

Tập xác định $D=\mathbf{R}$. Ta có: $y' = 2 + a\cos x - b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2-\sqrt{a^2+b^2} \leq y' \leq 2+\sqrt{a^2+b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4 .$$

Câu 39. Chọn **C.**

$(1) \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 40. Chọn **B.**

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 41. Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 42. Chọn **C.**

Bất phương trình $x^2-3x+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\ge 0$ $\Leftrightarrow m(x^2+x+1)\ge -x-2 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\le x\le 2$. Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 43. Chọn **B.**

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$. Điều kiện: $t\ge 1$.

Phương trình thành: $t^2+t-2m-2=0$ (*) . Khi $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t\in[1;2]$

(*) $\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{t^2+t-2}{2}=m$. Bảng biến thiên :

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0\le m\le 2$

Câu 44. Chọn C

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx$ (*)

Vì $x=0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$

Xét $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0\ \forall x\ge -\dfrac{1}{2};x\ne 0$

Bảng biến thiên

x	$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m\ge \dfrac{9}{2}$.

Câu 45. Chọn **D.**

Điều kiện : $x\ge 1$

Pt $\Leftrightarrow 3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+m=2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}}$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ với $x\ge 1$ ta có $0\le t<1$. Thay vào phương trình ta được $m=2t-3t^2=f(t)$

Ta có: $f'(t)=2-6t$ ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0\le m<\dfrac{1}{3}$

Câu 46. Chọn **D.**

Đặt $t=\sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x\in\left[-\dfrac{1}{2};3\right]\Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

Thay vào bất phương trình ta được $f(t)=t^2+t>m$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có : $m<0$

Câu 47. Chọn **D.**

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(1+x)(3-x)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)}=t^2-4$

Với $x\in[-1;3]\Rightarrow t\in[2;2\sqrt{2}]$. Thay vào bất phương trình ta được: $m\le -t^2+3t+4$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+3t+4;\ f'(t)=-2t+3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}<2$

t	2		$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	6	$\searrow$	$6\sqrt{2}-4$

Từ bảng biến thiên ta có $m\le 6\sqrt{2}-4$ thỏa đề bài

Câu 48. Chọn **D.**

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}>0\Rightarrow t^2=\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\right)^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$\Rightarrow 9\le t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}\le 9+(3+x)+(6-x)=18$

$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2-9); t \in \left[3;3\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$; $f'(t) = 1 - t < 0; \forall t \in \left[3;3\sqrt{2}\right] \Rightarrow \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t) = f(3) = 3$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t) = 3 \le m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 2$

Câu 49. Chọn B

Đặt $t = 2^x > 0$ thì $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m.t^2 + 4(m-1).t + (m-1) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m\left(t^2 + 4t + 1\right) > 4t + 1, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow g(t) = \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1} < m, \forall t > 0$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{-4t^2 - 2t}{\left(t^2 + 4t + 1\right)^2} < 0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{t \ge 0} g(t) = g(0) = 1 \le m$

Câu 50. Chọn **A.**

Bpt $\Leftrightarrow 3mx < x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 2, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{2}{x} = f(x), \forall x \ge 1$.

Ta có $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{2}{x^2} \ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{4\sqrt{2} - 2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x \ge 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} > m$

Câu 51. Chọn **A.**

$(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cos^2 x} + 3\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \ge m$. Đặt $t = \cos^2 x$, $0 \le t \le 1$

(1) trở thành $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t + 3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t \ge m$ (2). Đặt $f(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t + 3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$.

Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [0;1] \Leftrightarrow m \le \operatorname{Max}\limits_{t \in [0;1]} f(t) \Leftrightarrow m \le 4$

Câu 52. Chọn C

Điều kiện: $-2 \le x \le 4$. Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

Có $f'(x) = \dfrac{3\left(x^2 + x + 1\right)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0, \forall x \in (-2; 4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x) \ge f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1; 4] \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 53. Chọn **A.**

Điều kiện: $1 \le x \le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$

Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \ge 0$. Có $f'(t) = \dfrac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$. $(1) \Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2;3]$

Chủ đề 1.2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.
   - Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
   - Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

2. ***Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.
   - Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
   - Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$f_{CĐ}$	↘	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	f_{CT}	↗	

Chú ý.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}\,(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại (cực tiểu)** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. ***Quy tắc tìm cực trị của hàm số***
   - **Quy tắc 1:**

     Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

     Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

     Bước 3. Lập bảng biến thiên.

     Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.
   - **Quy tắc 2:**

     Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

     Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ là các nghiệm của nó.

     Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

2. *Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$*

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là : $y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$.
- Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - \left(3ax^2 + 2bx + c\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right) \xrightarrow{x=i} Ai + B \Rightarrow y = Ax + B$$

Hoặc sử dụng công thức $y - \frac{y'.y''}{18a}$.

- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \quad \text{với} \quad e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

3. *Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương.*

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

$$y' = 4ax^3 + 2bx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{array}\right.$$

(C) có ba điểm cực trị $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Các kết quả cần ghi nhớ:

- ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 1 = 0$$

- ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 3 = 0$$

- $\widehat{BAC} = \alpha$, ta có: $\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}$

- Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $r=\dfrac{\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}}{\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}}+\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}}=\dfrac{b^2}{4|a|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}$
- Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2+y^2-\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=0$

4. ***Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm phân thức.***

Công thức tính nhanh đạo hàm

- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\right)'=\dfrac{amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$
- $\left(\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)^2}$

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ là $y=\dfrac{2ax+b}{m}$

C. KỸ NĂNG SỬ DỤNG MÁY TÍNH

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=x^3+3x^2-x+2$

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3+3x^2-x+2-\left(3x^2+6x-1\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i}\frac{7}{3}-\frac{8}{3}i\Rightarrow y=-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}$$

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số:

$y=x^3-3x^2+m^2x+m$

Bấm máy tính: MODE 2

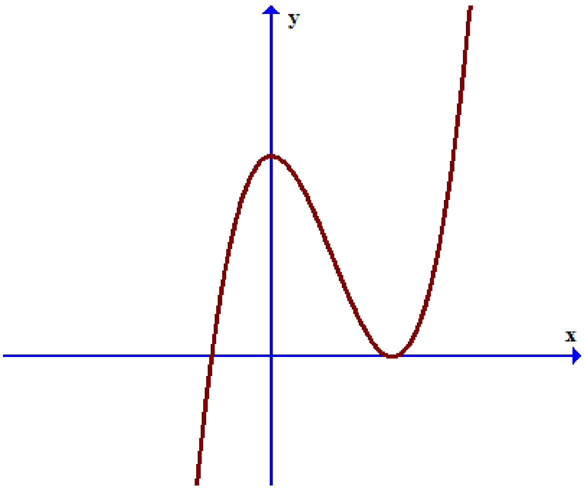
$$x^3-3x^2+m^2x+m-\left(3x^2-6x+m^2\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}\frac{1003000}{3}+\frac{1999994}{3}i$$

Ta có: $\dfrac{1003000}{3}+\dfrac{1999994}{3}i=\dfrac{1000000+3000}{3}+\dfrac{2000000-6}{3}i=\dfrac{m^2+3m}{3}+\dfrac{2m^2-6}{3}x$

Vậy đường thẳng cần tìm: $y=\dfrac{2m^2-6}{3}x+\dfrac{m^2+3m}{3}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và đạt cực đại $x = 0$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.
B. Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.
C. Hàm số không có cực trị.
D. Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y = x - 2$.
B. $y = 2x - 1$.
C. $y = -2x + 1$.
D. $y = -x + 2$.

Câu 6. Gọi M , n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + 17x^2 - 24x + 8$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_{CĐ}=1.$ **B.** $x_{CĐ}=\frac{2}{3}.$ **C.** $x_{CĐ}=-3.$ **D.** $x_{CĐ}=-12.$

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CĐ}=-2.$ **B.** $y_{CĐ}=1.$ **C.** $y_{CĐ}=-1.$ **D.** $y_{CĐ}=2.$

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x=\frac{3}{2}$?

A. $y=\frac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3x.$ **B.** $y=\sqrt{-x^2+3x-2}.$

C. $y=\sqrt{4x^2-12x-8}.$ **D.** $y=\frac{x-1}{x+2}.$

Câu 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7.$ **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5.$

C. $y=\frac{x-2}{x+1}.$ **D.** $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}.$

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là:

A. $5x-2y+13=0.$ **B.** $y=3x+13.$

C. $y=6x+13.$ **D.** $2x+4y-1=0.$

Câu 12. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

C. Hàm số đạt cực đại $x=1$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^7-x^5$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị. **B.** Hàm số có đúng 3 điểm cực trị .

C. Hàm số có đúng hai điểm cực trị. **D.** Hàm số có đúng 4 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 15. Cho hàm số $y=(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

C. Hàm số không có điểm cực trị. **D.** Hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2. Khi đó giá trị của biểu thức $S=x_1^2+x_2^2$ bằng:

A. -10. **B.** -8. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.

B. Nếu $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0.

C. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0.

D. Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại x_0.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và x_0 thuộc đoạn $[a, b]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$ hoặc $f''(x_0) > 0$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M, giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x_0) = 0$ vô nghiệm.

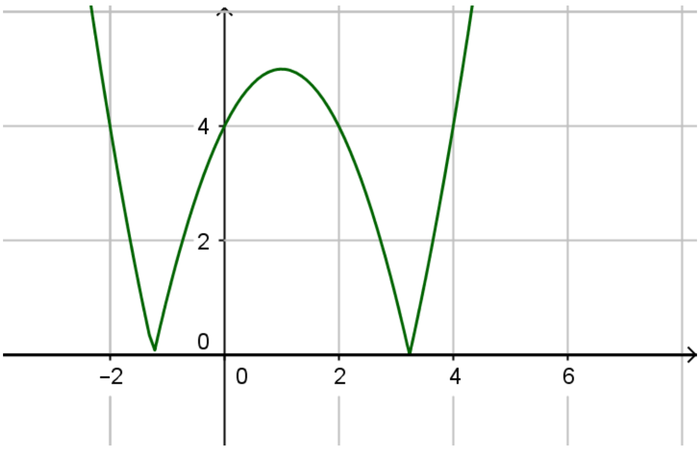
C. Hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm bậc ba.

D. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ luôn có cực trị.

Câu 20. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

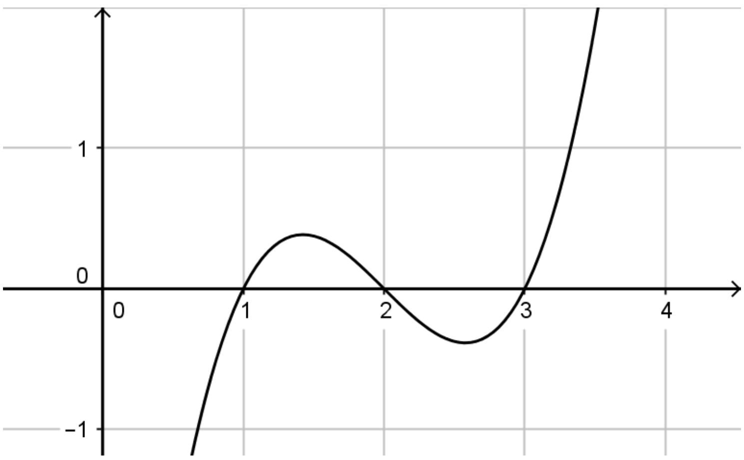
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = \left|x^2 - 2x - 4\right|$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

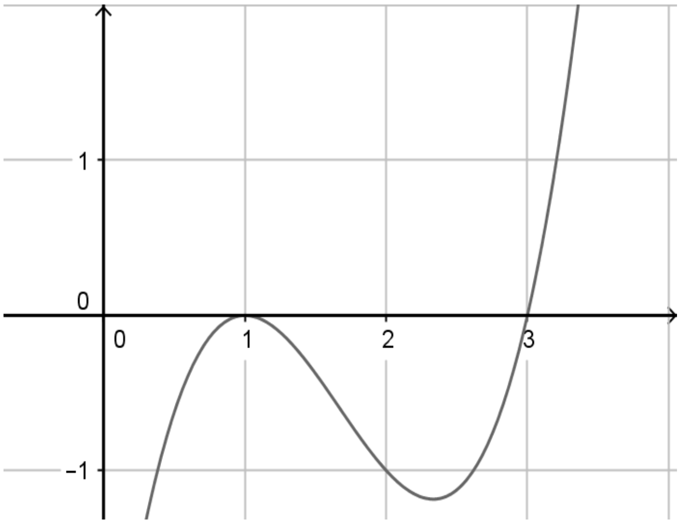
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

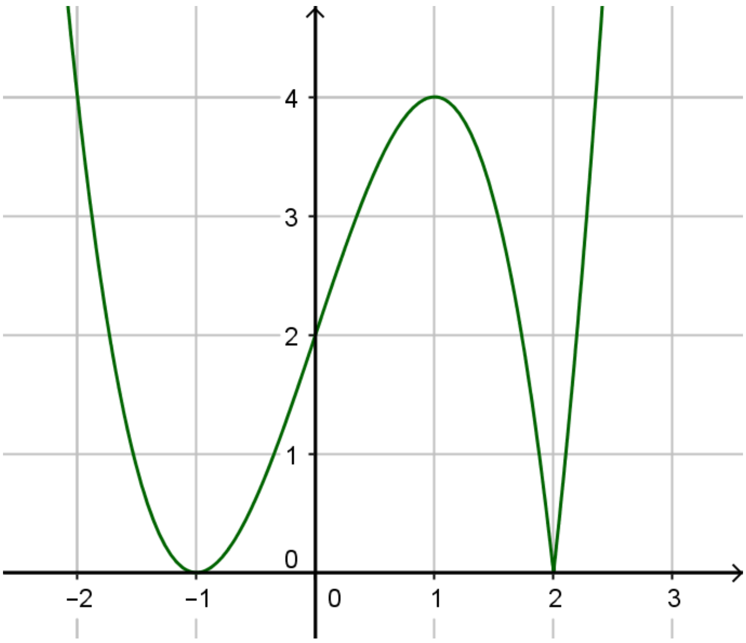
A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y=|x^3-3x-2|$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Câu 25. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y = x + \dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 + 7x - 2$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. **D.** $y = x - \dfrac{2}{x+1}$.

Câu 26. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = 2x + \dfrac{2}{x+1}$. **B.** $y = x^3 + 3x^2$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Câu 27. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào là khẳng định sai?

A. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ luôn có cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ luôn có ít nhất một điểm cực trị.

C. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0)$ luôn không có cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có nhiều nhất hai điểm cực trị.

Câu 28. Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$ là:

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Câu 29. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x = 1$?

A. $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$. **B.** $y = x^4 - 4x + 3$.

C. $y = x + \dfrac{1}{x}$. **D.** $y = 2\sqrt{x} - x$.

Câu 30. Hàm số nào sau đây có cực trị?

A. $y = x^3 + 1$. **B.** $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **C.** $y = 3x + 4$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$.

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = 3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m \leq 3$. **D.** $m < 3$.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{4x+7}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ có tọa độ điểm cực tiểu là:

A. $(3;1)$. **B.** $(-1;-1)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{85}{27}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 35. Hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 2m + 3$ có đúng 1 điểm cực trị thì giá trị của m là:

A. $m \geq 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m = 2$.

Câu 36. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2. Khi đó, tích số x_1x_2 có giá trị là:

A. 5. **B.** -5. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 37. Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$. Khẳng định nào sau đây làđúng:

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 38. Hàm số $y = a\sin 2x + b\cos 3x - 2x$ $(0 < x < 2\pi)$ đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi$. Khi đó, giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab$ là:

A. 3. **B.** −1. **C.** 1. **D.** −3.

Câu 39. Hàm số $y = -4x^3 - 6x^2 - 3x + 2$ có mấy điểm cực trị?

C. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 40. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

A. $m > 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m = 0$. **D.** $m < 0$.

Câu 41. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. (3;0). **B.** (1;3). **C.** (1;4). **D.** (3;1).

Câu 42. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì:

A. $m = 1$. **B.** $m \neq 1$. **C.** $m > 1$. **D.** m tùy ý.

Câu 43. Khẳng định nào là đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có thể có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số bậc 3 có thể có 3 cực trị.

C. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ luôn có cực trị.

D. Hàm phân thức không thể có cực trị.

Câu 44. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 45. Đồ thị hàm số $y = -3\sqrt[3]{x^2} + 2$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 46. Cho hàm số $y = -3x^4 + 4x^2 - 2017$. Khẳng định nào sau đây làđúng?

A. Hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu .

D. Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 47. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = x^3 + 3x^2$. **B.** $y = x^3 - x$. **C.** $y = x^4 - 3x^2 + 2$. **D.** $y = x^3$.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2. Khi đó, giá trị của tổng $x_1 + x_2$ là:

A. −6. **B.** −4. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 49. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

D. -4. **B.** -2. **C.** 2. **A.** 4.

Câu 50. Nếu đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y = 2x^3 - 3x^2$. **B.** $y = -2x^3 - 3x^2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

Câu 51. Hàm số nào dưới đây có cực trị?

A. $y = x^4 + 1$. **B.** $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

C. $y = 2x - 1$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$

Câu 52. Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$ có 3 điểm cực trị là:

A. $ab < 0$. **B.** $ab > 0$. **C.** $b = 0$. **D.** $c = 0$.

Câu 53. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m-1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \dfrac{1}{2}$.

B. Với mọi m , hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \dfrac{1}{2}$.

D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Câu 54. Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 3$ có giá trị cực đại là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 7.

Câu 55. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đúng 2 cực trị?

A. $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 5x^2 + 7$.

C. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x}$. **D.** $y = 2017x^6 + 2016x^4$.

Câu 56. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 57. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 58. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2 + b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 59. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 60. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ đạt cực đại tại điểm:

A. $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = -1$.

Câu 61. Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 5$

A. -4. **B.** -5. **C.** -2. **D.** -6.

Câu 62. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 63. Cho hàm số y= x^3-3x^2+2 . Khẳng định nào sau đây đúng :

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu . **B.** Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có cực đại , không có cực tiểu. **D.** Hàm số có cực tiểu không có cực đại.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Khi đó hàm số đã cho có :

A. Một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Một điểm cực đại , hai điểm cực tiểu.

C. 1 điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại , 1 điểm cực tiểu.

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=mx^4-(m+1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị ?

A. $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right.$. **B.** $m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m>-1$.

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-2x^2+(m+3)x-1$ không có cực trị?

A. $m\geq-\frac{8}{3}$. **B.** $m>-\frac{5}{3}$. **C.** $m\geq-\frac{5}{3}$. **D.** $m\leq-\frac{8}{3}$.

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$?

A. -1. **B.** Không tồn tại m . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên .

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{1}{3}$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $m<2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x+m$ có cực đại và cực tiểu .

A. $-2<m<3$.
B. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>3 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$.
D. $-2\le m\le 3$.

Câu 71. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m+2)\,x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị ?

A. $m\in(-3;1)\setminus\{-2\}$.
B. $m\in(-3;1)$.
C. $m\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.
D. $m\in[-3;1]$.

Câu 72. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+3)x^2+4(m+3)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-\frac{7}{2}<m<-2$.
B. $-3<m<1$.
C. $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$.
D. $-\frac{7}{2}<m<-3$.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(\mathrm{m}^2-m+2)x^2+(3m^2+1)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$.
B. $m=3$.
C. $m=1$.
D. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 74. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại $x_1,\,x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.
B. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$.
C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\setminus\{0\}$.
D. $m=2$.

Câu 75. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+m$ chỉ có đúng một cực trị.

A. $0<m\le 1$..
B. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$
D. $0\le m\le 1$.

Câu 76. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m^2-4m+3)x^2+2m-1$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;0)$.
B. $m\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.
C. $m\in(-\infty;0)\cup(1;3)$.
D. $m\in(1;3)$.

Câu 77. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m=-1$.
B. $m\neq 0$.
C. $m=1$.
D. $m=\pm 1$.

Câu 78. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-1$.

Câu 79. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều.

A. Không tồn tại m. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$. **C.** $m=\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{3}$.

Câu 80. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ là:

A. $4\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 81. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ có đồ thị là (C). Diện tích tam giác có các đỉnh là các điểm cực trị của đồ thị (C) là:

A. $m=8$. **B.** $m=16$. **C.** $m=32$. **D.** $m=4$.

Câu 82. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ có cực trị.

A. $m\neq 1$. **B.** $\forall m$. **C.** $m\leq 1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10$ có 3 điểm cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l} 0<m<3 \\ m<-3 \end{array}\right.$. **B.** $m<-3$. **C.** $0<m\leq 3$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 0<m<3 \\ m\leq -3 \end{array}\right.$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m<-1$. **B.** $-1\leq m\leq 0$. **C.** $m>1$. **D.** $-1\leq m<0$.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m-1)x+2$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ dương.

A. $0\leq m\leq 1$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $m\geq 0$. **D.** $m>1$.

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-\frac{2}{3}$. **C.** $m=\frac{2}{3}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 89. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để : $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$

A. $m=\pm\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 90. Cho hàm số $y=\left(m-1\right)x^4-3mx^2+5$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để hàm số có cực đại mà không có cực tiểu

A. $m\in\left(-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[0;1\right]$.

C. $m\in\left(0;1\right)$. **D.** $m\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Câu 91. Cho hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất .

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 92. Tìm các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=2x^3+3\left(m-3\right)x^2+11-3m$ có hai điểm cực trị. Đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm $C\left(0;-1\right)$ thẳng hàng .

A. $m=4$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=2$.

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$ bán kính bằng 1 tại 2 điểm *A, B* mà diện tích tam giác *IAB* lớn nhất .

A. $m=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $m=1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 94. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=2x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị *A, B* sao cho đường thẳng *AB* vuông góc với đường thẳng : $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$

Câu 95. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3\left(m+2\right)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của *m* để hàm số có điểm 2 cực trị và giá trị 2 cực trị cùng dấu .

A. $\frac{-23}{4}<m<2$. **B.** $\frac{-15}{4}<m<2$. **C.** $\frac{-21}{4}<m<2$. **D.** $\frac{-17}{4}<m<2$.

Câu 96. Cho hàm số $y=2x^3-9x^2+12x+m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa độ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}-\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Câu 97. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm .

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 98. Tính theo m khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu (nếu có) của đồ thị hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$.

A. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+5m^2+9\right)}$. **B.** $\frac{4}{9}\sqrt{\left(2m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$.

C. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$. **D.** $\sqrt{\left(4m^2+4\right)\left(4m^4+8m^2+10\right)}$.

Câu 99. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6m\left(1-2m\right)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x\ (d)$.

A. $m\in\{1\}$. **B.** $m\in\{0;1\}$. **C.** $m\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$. **D.** $m\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 100. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3+mx^2+7x+3$ có đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu vuông góc với đường thẳng có phương trình : $y=3x\ (d)$.

A. $m=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\pm\sqrt{\frac{47}{2}}$.

Câu 101. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

A. $m=1$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\\m=\pm1\end{array}\right.$. **D.** $m=\pm1$.

Câu 102. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\ (d)$.

A. $m=0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-\frac{9}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\frac{9}{2}$.

Câu 103. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=1$.

Câu 104. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=\pm1$. **B.** $m=1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m=-1$.

Câu 105. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. Không tồn tại m. **B.** $m = \sqrt[5]{2}$. **C.** $m = -\sqrt[5]{2}$. **D.** $m = \pm\sqrt[5]{2}$.

Câu 106. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m < -1$. **B.** $m > 2$.

C. $m \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 107. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - (3m-1)x^2 + 2m + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m = 3$. **B.** $m = 1$.

C. $m = -1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 108. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 4m + 1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi.

A. Không tồn tại m. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{4} \\ m = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Câu 109. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2-1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O .

A. $m = \pm\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = \pm 1$.

Câu 110. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

A. $m = 2$ hoặc $m = 0$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = \pm 2$.

Câu 111. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) có ba điểm cực trị A , B , C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$. **B.** $m = 2 + 2\sqrt{2}$. **C.** $m = 2 - 2\sqrt{2}$. **D.** $m = \pm 1$.

Câu 112. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$.

A. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $m = 0$ hoặc $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 113. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 + m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

A. $m = -3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m = -1$. **B.** $m = -3 + 2\sqrt{2}$ hoặc $m = -1$.

C. $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-3-2\sqrt{2}$. **D.** $m=-3+2\sqrt{2}$.

Câu 114. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (C) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m=\pm1$. **B.** $m=1$ hoặc $m=0$.
C. $m=-1$ hoặc $m=0$. **D.** $m=-1$.

Câu 115. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=-\frac{17}{11}$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-\frac{17}{11}$.

Câu 116. Cho hàm số $y=x^3-3x^2\,(C)$ .Tìm tất cả các giá trị thực tham số m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

A. $m=2$ hoặc $m=-\frac{2}{11}$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=-\frac{2}{11}$.
C. $m=2$ hoặc $m=\frac{2}{11}$. **D.** $m=2$.

Câu 117. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=1+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **D.** $m=1-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 118. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M\,(2m^3;\,m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1\ (C)$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

E. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN 1.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	B	A	C	B	D	B	B	A	C	D	C	A	C	D	C	D	D	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	B	D	A	D	A	A	D	B	C	B	D	B	A	A	B	C	C	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	B	A	A	A	C	A	C	D	B	A	D	B	B	C	C	D	B	C	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118		
D	A	B	A	D	B	A	B	A	D	C	D	C	A	D	A	C	B		

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn A.

Câu 2. Chọn A.

Câu 3. Chọn B.

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta được hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 4. Chọn A.

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$y(0) = 3;\quad y(1) = y(-1) = 2$ nên hàm số có hai cực trị.

Câu 5. Chọn C.

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(1;-1), B(-1;3)$ $\Rightarrow$ Phương trình $AB: y = -2x + 1$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $x^3 - 3x + 1 - \left(3x^2 - 3\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Bước 3 : CALC $x = i$

Kết quả : $1 - 2i \Rightarrow$ phương trình AB: $y = 1 - 2x$

Câu 6. Chọn B.

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CD}=-3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $y_{CT}=1$

$\Rightarrow M^2-2n=7$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1: $\left.\dfrac{d\left(\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}\right)}{dx}\right|_{x=1000}.(100+2)^2 \to 1004003=1000^2+4000+3=x^2+4x+3$

$y'=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$

Bước 2: Giải phương trình bậc hai : $x^2+4x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\to A \\ x=-3\to B\end{array}\right.$

Bước 3: Nhập vào máy tính $\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

Cacl $x=A\to C$

Cacl $x=B\to D$

Bước 4: Tính $C^2-2D=7$

Câu 7. **Chọn D.**

$y'=3x^2+34x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-12 \\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-12$.

Câu 8. **Chọn B.**

$y'=12x^3-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1\end{array}\right.$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$.

Câu 9. **Chọn B.**

Hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$ có $y'=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$ và y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi x chạy qua $\dfrac{3}{2}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{3}{2}$.

Dùng casio kiểm tra: $\begin{cases} y'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0 \\ y''\left(\dfrac{3}{2}\right)<0\end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại $\dfrac{3}{2}$.

Câu 10. **Chọn A.**

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 11. **Chọn C.**

$y'=\dfrac{3x^2+18x+20}{(x+3)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-9+\sqrt{21}}{3} \\ x=\dfrac{-9-\sqrt{21}}{3}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=6x+13$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức , ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y=\frac{\left(3x^2+13x+19\right)'}{(x+3)'} \Leftrightarrow y=6x+13$$

Câu 12. **Chọn D.**

TXĐ: $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$ **.**

$y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=0 \Leftrightarrow x=1(l)$.

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 13. **Chọn C.**

$y'=7x^6-5x^4=x^4(7x^2-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{7}}\end{array}\right.$.

y' chỉ đổi dấu khi x chạy qua $\pm\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 14. **Chọn A.**

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 15. **Chọn C.**

TXĐ $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

$y'=\dfrac{1}{3}(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}(2x-2)$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 16. **Chọn D.**

$D=\mathbb{R}$

$y'=-3x^2+6x+6$

Phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1,x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2.

$S=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=8$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bước 1: Giải phương trình bậc hai : $-3x^2+6x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\to A \\ x=1-\sqrt{3}\to B\end{array}\right.$

Bước 2: Tính $A^2+B^2=8$

Câu 17. **Chọn C.**

Câu 18. Chọn D.

Câu 19. Chọn D.

Câu 20. Chọn C.

Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$\Delta' = b^2 - 3ac$

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

Câu 21. Chọn C.

Câu 22. Chọn C.

Câu 23. Chọn B.

Câu 24. Chọn D.

Câu 25. Chọn A.

Hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+1}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

y' đổi dấu khi x chạy qua -2 và 0 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 26. Chọn D.

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số không có cực trị

Câu 27. Chọn A.

Câu 28. Chọn A.

TXĐ $D = \mathbb{R}$

$$y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

y' đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi x chạy qua -1 nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 29. Chọn D.

Hàm số $y = 2\sqrt{x} - x$ có TXĐ $D = [0; +\infty)$

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) = -\dfrac{1}{2} < 0 \end{cases}$$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 30. Chọn B.

+ A. Hàm số trùng phương luôn luôn có cực trị.

+ B. $y = x^3 + 1$

Ta có: $y' = 3x^2 \Rightarrow y' \geq 0\ \forall x \in R$.

Do đó, hàm số luôn đồng biến trên R. Hàm số này không có cực trị.

+ Đối với phương án C và D, đây là hàm số bậc nhất và phân thức hữu tỉ bậc nhất/bậc nhất. Đây là 2 hàm số luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định của chúng, do đó 2 hàm số này không có cực trị.

Câu 31. **Chọn C.**

+ Đây là hàm số trùng phương có $ab = -3 < 0$ nên hàm số này có 3 điểm cực trị. Mặt khác, có $a = 1 > 0$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 32. **Chọn B.**

+ Để hàm số đạt cực đại $x = 1$ thì $\begin{cases} y'(1) = 3.1^2 - 2m.1 + 2m - 3 = 0 \\ y''(1) = 6.1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$

Câu 33. **Chọn D.**

+ Hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất/ bậc nhất luôn đơn điệu trên các khoảng xác định của chúng, do đó hàm này không có cực trị.

Câu 34. **Chọn D.**

+ Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 3$

Câu 35. **Chọn A.**

+ Hàm trùng phương có 1 điểm cực trị khi $ab \geq 0 \Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 36. **Chọn A.**

+ Ta có: $y' = -x^2 + 8x - 5$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 5 = 0$.

Khi đó, theo định lý Viet, ta có: $x_1 x_2 = 5$

Câu 37. **Chọn B.**

+ Ta có: $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 38. **Chọn C.**

TXĐ: $D = R$

+ Ta có: $y' = 2a\cos 2x - 3b\sin 3x - 2$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = \dfrac{\pi}{2}; x = \pi$ nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2a + 3b - 2 = 0 \\ y'(\pi) = 2a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Do đó, giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab = 1$.

Câu 39. **Chọn C.**

+ Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 6^2 - 3.3.4 = 0$. Do đó, hàm số luôn đơn điệu trên R. Hàm số này không có cực trị.

Câu 40. **Chọn C.**

$y' = 3x^2 - 6x + m$

$y'' = 6x - 6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi:

$\begin{cases} y'(2) = 3.2^2 - 6.2 + m = 0 \\ y''(2) = 6.2 - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Câu 41. **Chọn B.**

$y' = 3x^2 - 12x + 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array} \right.$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow y_{CD} = 3$.

Câu 42. **Chọn B.**

+ Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3(m-1)(m+1) > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1$

Câu 43. **Chọn C.**

+ A . Hàm số trùng phương luôn có cực trị do đạo hàm của nó là một đa thức bậc 3 luôn có nghiệm thực. Nên đáp án này đúng.

+ B. Hàm số bậc 3 có tối đa 2 cực trị. Nên đáp án này sai.

+ C. Hàm số trùng phương chỉ có thể có 1 hoặc 3 điểm cực trị. Nên đáp án này sai.

+ D. Đáp án này sai.

Câu 44. **Chọn B.**

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array} \right.$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và $y_{CT} = 4$.

Câu 45. **Chọn C.**

+ Ta có: $y' = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Dễ dàng nhận thấy $x = 0$ là điểm tới hạn của hàm số, và y' đổi dấu khi đi qua $x = 0$. Nên $x = 0$ là cực trị của hàm số. Hơn nữa, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Do đó, $x = 0$ là cực đại của hàm số.

Câu 46. **Chọn D.**

+ Đây là hàm số trùng phương có $ab = -3.4 < 0$ nên hàm số này có 3 điểm cực trị. Hơn nữa, hàm số có $a = -3 < 0$ nên hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 47. **Chọn D.**

+ A. Có $y' = 3x^2 \geq 0 \forall x \in R$. Do đó, hàm số này luôn đồng biến trên R. Hay nói cách khác, hàm số này không có cực trị.

+ B. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 3 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

+ C. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

+ D. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 9 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

Câu 48. **Chọn D.**

$y' = 3x^2 - 12x + 4$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 4 = 0$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó, theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = 4$.

Câu 49. **Chọn A.**

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$y_{CD} - y_{CT} = y(0) - y(2) = 4$.

Câu 50. **Chọn B.**

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là gốc tọa độ, ta có:

$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = d = 0$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(-1;-1)$, ta có:

$\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ b - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

Vậy hàm số là: $y = -2x^3 - 3x^2$.

Câu 51. **Chọn A.**

+ A. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

+ B. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = -5 < 0$. Do đó, hàm số này không có cực trị.

+ C. Hàm số bậc nhất đơn điệu trên R . Do đó, hàm số này cũng không có cực trị.

+ D. Hàm số phân thức hữu tỷ bậc nhất/bậc nhất luôn đơn điệu trên các khoảng xác định của nó.

Do đó, hàm số này không có cực trị.

Câu 52. **Chọn A.**

+ Như ta đã biết, điều kiện để hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị là $-\dfrac{b}{2a} > 0$. Ở đây lại có, $a \neq 0$ nên điều kiện trở thành $ab < 0$.

Câu 53. **Chọn C.**

Hàm số bậc 3 có cực đại, cực tiểu thì $b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (4m-1) > 0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$.

Câu 54. **Chọn D.**

$y' = -4x^3 + 8x = -4x(x^2 - 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y_{CD} = 7$.

Câu 55. **Chọn B.**

+ A. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 25 > 0$. Do đó, hàm số có 2 cực trị.

+ B. Hàm số $y = x^4 + 3x^2 + 2$ có 1 cực trị.

+ C. Có $y' = \dfrac{2x^2+1}{3x^2} > 0 \forall x \in R \setminus \{0\}$. Do đó, hàm số này đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Hàm số này không có cực trị.

+ D. Có $y' = 2017.6x^5 + 2016.4x^3$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số này có đúng 1 cực trị.

Câu 56. **Chọn A.**

Ta có $y' = \dfrac{2-2x^3}{\sqrt{1+4x-x^4}}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 2$

Câu 57. **Chọn A.**

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + a$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(1;3)$, ta có:

$\begin{cases} y'(1) = -1 + a = 0 \\ y(1) = -1 + a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

Khi đó ta có, $4a - b = 1$.

Câu 58. **Chọn C.**

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Ta có: $a = y(0) = -2; b = y(2) = -6 \Rightarrow 2a^2 + b = 2$.

Câu 59. **Chọn A.**

+ Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x = 0$. Do đó: $x_1 x_2 x_3 = 0$.

Câu 60. **Chọn D.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$

Câu 61. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array} \right.$

Lập bảng biến thiên . Suy ra : $y_{CD} = -4$

Câu 62. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in R$

Hàm số không có cực trị

Câu 63. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$. Vậy hàm số có 2 cực trị .

Câu 64. **Chọn A.**

Câu 65. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]: $y' = 4mx^3 - 2(m+1)x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(2mx^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 = m + 1 \end{array} \right.$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array} \right.$

[Phương pháp trắc nghiệm] : Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị khi và chỉ khi a và b trái dấu , tức là : $ab < 0$

Suy ra : $m(m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$

Câu 66. **Chọn C.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 4x + m + 3$

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \le 0 \Leftrightarrow 4 - 3(m+3) \le 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{5}{3}$

Câu 67. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = x^2 - 2mx + m + 1$

$y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi :

$\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 4m + m + 1 = 0 \\ -4 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Câu 68. **Chọn C.**

Câu 69. **Chọn D.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = mx^2 + 4x + m$

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$

Câu 70. **Chọn B.**

$y' = x^2 + 2mx + m + 6$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 3 \end{array}\right.$$

Câu 71. **Chọn A.**

$y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ m^2 + 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-3;1) \setminus \{-2\}$

Câu 72. **Chọn D.**

$y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $-1 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2-4(m+3)>0 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \\ x_1+x_2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(m-1)>0 \\ x_1x_2+(x_1+x_2)+1>0 \\ x_1+x_2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m>-\dfrac{7}{2} \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<m<-3$$

Câu 73. **Chọn B.**

$y' = x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1$

$y'' = 2x+2(m^2-m+2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ khi:

$$\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3=0 \\ m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$$

Câu 74. **Chọn B.**

$y' = mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1+2x_2=1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m-1)^2-3m(m-2)>0 \\ x_1x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \\ x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1+2x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1=\dfrac{3m-4}{m} \\ x_2=\dfrac{2-m}{m} \\ x_1x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1=\dfrac{3m-4}{m} \\ x_2=\dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right)=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Câu 75. **Chọn C.**

Trường hợp 1: $m=0$

Ta có hàm số: $y=-x^2$, hàm số này có 1 cực trị. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m\neq 0$

$y' = 4mx^3+2(m-1)x$

Hàm số có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m<0 \end{array}\right.$

Kết hợp TH1 và TH2, ta có: $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$ thỏa mãn.

Câu 76. **Chọn C.**

$y' = 4mx^3+2(m^2-4m+3)x$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{m^2-4m+3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in (-\infty;0)\cup(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty;0)\cup(1;3)$

Câu 77. **Chọn D.**

$y' = 4x^3 - 4m^2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $A(0;1)$, $B\left(m;1-m^4\right)$, $C\left(-m;1-m^4\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A.

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Lưu ý: có thể sử dụng công thức $\dfrac{b^3}{8a} + 1 = 0$.

Câu 78. **Chọn B.**

$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m - 1\right) = 0$

Hàm số có điểm 3 cực trị $\Leftrightarrow m > -1$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là :

$A\left(0;m^2\right)$, $B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A.

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A \Leftrightarrow AB.AC = 0$

$\Leftrightarrow -(m+1) + (-m^2 - 2m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = 0$ (thỏa mãn).

Lưu ý: Có thể làm theo cách khác:

+) *Cách 1:* Gọi M là trung điểm của BC, tìm tọa độ điểm M, ΔABC vuông tại đỉnh A thì $2AM = BC$.

+) *Cách 2:* Sử dụng định lý Pitago $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+) *Cách 3:* $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos 45^0$

+) Hoặc sử dụng công thức $\dfrac{b^3}{8a} + 1 = 0$

Câu 79. **Chọn C.**

$y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m\right) = 0$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là :

$A\left(0;m^4+2m\right)$, $B\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$, $C\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A.

Vậy ΔABC đều chỉ cần $AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = \sqrt[3]{3}$ (thỏa mãn).

Lưu ý: có thể sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{8} + 3 = 0 \Leftrightarrow m^3 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$

Câu 80. **Chọn C.**

Ta có: $y = x^3 - 3x$

Các điểm cực trị: $A(1;-2); B(-1;2)$. Nên ta có $AB = 2\sqrt{5}$.

Câu 81. **Chọn A.**

Ta có: $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

Các điểm cực trị: $A(-2;-1); B(0;3); C(2;-1)$.

Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân tại B. $H(0;-1)$ là trung điểm của AC.

Nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BH.AC = \frac{1}{2}.4.4 = 8$.

Câu 82. **Chọn A.**

Ta có : $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Câu 83. **Chọn A.**

Để hàm số có ba cực trị thì trước hết hàm số phải là hàm số trùng phương tức $m \neq 0$.

Ta có : $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 9\right)x = 4mx(x^2 + \frac{m^2 - 9}{2m})$.

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi : y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{m^2 - 9}{2m} < 0$

$\Leftrightarrow m\left(m^2 - 9\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là : $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

Câu 84. **Chọn B.**

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $y = x^2 + \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu ($x = 0$) mà không có cực đại $\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm số trùng phương ta có :

$y' = 4(m+1)x^3 - 2mx = 4(m+1)x\left[x^2 - \frac{m}{2(m+1)}\right]$.

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow y'$ có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+1) > 0 \\ \frac{m}{2(m+1)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1 \leq m \leq 0$.

Câu 85. **Chọn D.**

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m - 1$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Điều này tương đương $\Delta' = 9m^2 - 3(m-1) > 0 \Leftrightarrow 3m^2 - m + 1 > 0$ (đúng với mọi m).

Hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ \dfrac{m-1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m > 1$.

Câu 86. **Chọn D.**

Ta có $y' = -3x^2 + 3m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - m = 0\ (*)$

Đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0\ (**)$

Khi đó 2 điểm cực trị $A\left(-\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m}\right)$, $B\left(\sqrt{m}; 1 + 2m\sqrt{m}\right)$

Tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 87. **Chọn D.**

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (*). Khi đó hai điểm cực trị là $A(2;9m)$, $B(2m; -4m^3 + 12m^2 - 3m + 4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2m - 1 = 0 \\ -4m^3 + 12m^2 + 6m + 4 - \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$(thoả (*).

Câu 88. **Chọn C.**

Ta có : $y' = 2x^2 - 2mx - 2\left(3m^2 - 1\right) = 2\left(x^2 - mx - 3m^2 + 1\right)$,

$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$ là tam thức bậc hai có $\Delta = 13m^2 - 4$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$. (1)

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 89. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

$y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số luôn luôn có cực trị với moi m

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m^2-1 \end{cases}$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (2m)^2-3(m^2-1)=7 \Leftrightarrow$ m= ±2

Cách 2 : y'=0 $\Leftrightarrow x^2-2mx+(m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (m+1)^2+(m-1)^2-(m-1)(m+1)=7$

$\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 90. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

$y'=4(m-1)x^3-6mx=0$ **(*)**

TH1 : Nếu $m=1$, (*) trở thành : $y'=-6x=0$ hay x= 0 , $y''=-6<0$

Vậy $m=1$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$

TH2 : Nếu $m\neq 1$

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{3m}{2(m-1)} \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại mà ko có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ \dfrac{3m}{2(m-1)}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<1$

Kết hợp 2 trường hợp : $m\in[0;1]$

Câu 91. **Chọn C.**

[Phương pháp tự luận]

$y'=4x^3-4(1-m^2)x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1-m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi và chỉ khi : $|m|<1$

Tọa độ điểm cực trị $A(0;m+1)$

$B\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$C\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{1-m^2};0\right)$

Phương trình đường thẳng BC : $y+m^4-2m^2-m=0$

$d(A,BC)=m^4-2m^2+1$, $BC=2\sqrt{1-m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC.d[A,BC]=\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\leq 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

Khi đó S = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 92. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = 6x^2 + 6(m-3)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 - m \end{array}\right.$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow m \ne 3$

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A(0; 11 - 3m)$

$B\left(3 - m; m^3 - 9m^2 + 24m - 16\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(3 - m, (3-m)^3\right)$.

Phương trình đt AB : $(3-m)^2 x + y - 11 + 3m = 0$

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow C \in AB$

Hay : $-1 - 11 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y - \frac{y'.y''}{18a} = 2x^3 + 3(y-3)x^2 + 11 - 3y - \frac{\left(6x^2 + 6(y-3)x\right)\left(12x + 6(y-3)\right)}{36}$

Bước 3 : Cacl $x = i$, $y = 1000$

Kết quả : $-2989 - 994009i$. Hay : $y = -2989 - 994009x$

Từ đó : $-2989 = -3m + 11$, $-994009 = -(m-3)^2$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là : $(3-m)^2 x + y - 11 + 3m = 0$

A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow C \in AB$

Hay : $-1 - 11 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 93. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 3m$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{array}\right.$. Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi : $m > 0$

Khi đó tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $M\left(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + 2\right)$

$N\left(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 2\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-2\sqrt{m}; 4m\sqrt{m}\right)$

Phương trình đt MN : $2mx + y - 2 = 0$

(Học sinh có thể dùng cách lấy y chia cho y')

Ta có : $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\widehat{AIB}=90^0$ $\Rightarrow d\left[I,MN\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow\frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow m=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y-\frac{y'.y''}{18a}=2x^3-3yx+2-\frac{(6x^2-3y)(12x)}{18}$

Bước 3 : Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả : 2 – 2000i . Hay : y= 2 – 2000x

Từ đó : $-2000=-2m$,

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị A, B là : $y=2-2mx$ hay $2mx+y-2=0$

Giải như tự luận ra kết quả .

Câu 94. **Chọn C.**

[Phương pháp tự luận]

Ta có : $y=6x^2-6(m+1)x+6m$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là : $m\ne1$

Ta có : $A(1;3m-1)$ $B\left(m;-m^3+3m^2\right)$

Hệ số góc đt AB là : $k=-(m-1)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y-\frac{y'.y''}{18a}=2x^3-3(y+1)x^2+6yx-\frac{\left(6x^2-6(y+1)x+6y\right)\left(12x-6(y+1)\right)}{36}$

Bước 3 : Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả : 1001000 – 9980001.i . Hay : $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là : $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow(m-1)^2=1$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

Câu 95. **Chọn D.**

[Phương pháp tự luận]

$y'=3x^2-12x+3(m+2)$

$y'=0\Leftrightarrow y'=x^2-4x+(m+2)=0$

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m<2$

Chia y cho y’ ta được : $y=\frac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng : $A\left(x_1;(m-2)(2x_1+1)\right)$ và $B\left(x_2;(m-2)(2x_2+1)\right)$

Có : $y_1.y_2=(m-2)^2(4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1)$

Với : $\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=m+2\end{cases}$ nên : $y_1.y_2=(m-2)^2(4m+17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2>0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{-17}{4}\\ m\neq 2\end{cases}$

Kết hợp đk : $-\dfrac{17}{4}<m<2$.

Câu 96. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

Ta có : $y'=6x^2-18x+12$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y(1)=5+m\\ x=2\Rightarrow y(2)=4+m\end{array}\right.$

$A(1;5+m)$ và $B(2;4+m)$là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{OA}=(1;5+m)$, $\overrightarrow{OB}=(2;4+m)$, $\overrightarrow{AB}=(1;-1)$

OAB là 1 tam giác $\Leftrightarrow -4-m\neq 2 \Leftrightarrow m\neq -6$

Chu vi của ΔOAB là: $2p=\sqrt{1+(m+5)^2}+\sqrt{4+(m+4)^2}+\sqrt{2}$

Sử dụng tính chất $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ với $\vec{u}=(1;-5-m)$ và $\vec{v}=(2;4+m)$

Từ đó ta có : $\sqrt{1+(m+5)^2}+\sqrt{4+(m+4)^2}+\sqrt{2}\geq\sqrt{3^2+(-1)^2}+\sqrt{2}=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{-5-m}{4+m}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{14}{3}$.

Vậy chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$ khi $m=-\dfrac{14}{3}$.

Câu 97. **Chọn D.**

[Phương pháp tự luận]

$y'=4x^3-4mx$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\end{array}\right.$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;m-1)$

$B\left(\sqrt{m};m^2+m-1\right)$

$C\left(-\sqrt{m};m^2+m-1\right)$

Vì B,C đối xứng nhau qua trục tung nên $BC\perp OA$

Do đó O là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow OB\perp AC$ hay $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0$

Với $\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{m},m^2+m-1\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m},m^2\right)$

Từ đó : $-m+m^2\left(m^2+m-1\right)=0$

$\left[m=0\right.$

$\Leftrightarrow \left\lfloor m = 1 \right.$

Vậy $m=1$ là gtct .

Câu 98. **Chọn C.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

Cách 1:

$y'=x^2-2mx-1$

$\Delta'=m^2+1>0\forall m$, suy ra hàm số có 2 cực trị $\forall m$ .Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt $y'=0$

Bấm máy tính:

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1-\left(x^2-2mx-1\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{m}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}\frac{2003}{3}-\frac{2000002}{3}i$$

$$=\frac{2m+3}{3}-\frac{2m^2+2}{3}x$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;\frac{2m+3}{3}-\frac{2m^2+2}{3}x_1\right)$; $B\left(x_2;\frac{2m+3}{3}-\frac{2m^2+2}{3}x_2\right)$

$$AB^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\left(x_2-x_1\right)^2=\left(x_2-x_1\right)^2\left(1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)$$

$$=\left(4m^2+4\right)\left(1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)=\frac{\left(4m^2+4\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}{9}\Rightarrow AB=\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$$

Cách 2: ***Sử dụng công thức*** $AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}$ với $e=\frac{b^2-3ac}{9a}$

$$e=\frac{m^2+1}{3}\Rightarrow AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}.$$

Câu 99. **Chọn A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=6x^2+6\left(m-1\right)x+6m\left(1-2m\right)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq\frac{1}{3}$

Bấm máy tính:

$$2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6m\left(1-2m\right)x-\left(6x^2+6\left(m-1\right)x+6m\left(1-2m\right)\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m-1}{6}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$1997001000-8994001i=\left(2.10^9-3.10^6+10^3\right)-\left(9.10^6-6.10^3+1\right)i=$$

$$=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m\ (\Delta)$

$$\Delta\equiv d\Leftrightarrow\begin{cases}-\left(9m^2-6m+1\right)=-4\\2m^3-3m^2+m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$

Câu 100. **Chọn A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2+2mx+7$

Hàm số có 2 cực trị $|m|>\sqrt{21}$

Bấm máy tính:

$x^3+mx^2+7x+3-\left(3x^2+2mx+7\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m}{9}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}-\frac{6973}{9}-\frac{1999958}{9}i=$

$=-\frac{7000-27}{9}-\left(\frac{2.10^6-42}{9}\right)i=-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)x+\frac{7m-27}{9}$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)x+\frac{7m-27}{9}$ (Δ)

$\Delta\perp d\Leftrightarrow-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)3=-1\Leftrightarrow m^2=\frac{45}{2}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}$ (thỏa mãn).

Câu 101. Chọn D.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq0$, gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$

Bấm máy tính:

$-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1-\left(-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$

$-2000002+2000000i=-\left(2.10^6+2\right)+2.10^6i=2m^2x-2m^2-2$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;2m^2x_1-2m^2-2\right)$; $B\left(x_2;2m^2x_2-2m^2-2\right)$

ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow OA.OB=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2m^2-2\right)\left(2m^2x_2-2m^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2\left(m^2+1\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(m^2+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(1-m^2\right)\left(1+4m^4\right)+4\left(m^2+1\right)\left(1+m^2-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m^2+5\right)=0\Leftrightarrow m=\pm1.$

Câu 102. Chọn A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có:

$x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$

$-\frac{994}{3}-\frac{2006}{3}i=-\frac{1000-6}{3}-\frac{2000+6}{3}i=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;-\frac{2m+6}{3}x_1-\frac{m-6}{3}\right)$; $B\left(x_2;-\frac{2m+6}{3}x_2-\frac{m-6}{3}\right)$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(1;-m\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$ (Δ)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta // d \text{ or } \Delta \equiv d\\ I \in d\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{2m+6}{3}=1\\ -m=1-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{9}{2}\\ m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m = 0$.

Câu 103. Chọn B.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi $m > 0$ (*)

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;m-1), B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right), C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|y_B - y_A\right| . \left|x_C - x_B\right| = m^2\sqrt{m}$; $AB = AC = \sqrt{m^4+m}$, $BC = 2\sqrt{m}$

$R = \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Áp dụng công thức: $R = \dfrac{b^3-8a}{8|a|b} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{(-2m)^3-8}{8(-2m)} \Leftrightarrow m^3 + 1 = 2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 104. Chọn A.

$y' = y = 4x^3 - 4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0; m^4+1\right), B\left(-m;1\right), C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có: A, O, I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB \perp OB \Leftrightarrow AB.OB = 0 \Leftrightarrow m^2 - m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m = \pm1$ (thỏa mãn).

Câu 105. Chọn D.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC} = \dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$, ta có:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} \Rightarrow 64 = \dfrac{64m^4}{4}\sqrt{\dfrac{8m^2}{2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn).

Câu 106. Chọn B.

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là $A(0;m), B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right), C\left(\sqrt{m};\, m-m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;\, m-m^2\right)$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AI.BC = m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p = AB + BC + AC = 2\left(\sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)}{m^4} > 1$ (vì $m > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right) > m^2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^5} > m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r = \dfrac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}} \Rightarrow r = \dfrac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}} = \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} - 1 > m$

$\sqrt{1+m^3} > m+1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} > m+1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

Câu 107. Chọn A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > \dfrac{1}{3}$

Áp dụng công thức:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}\right) = 0$

Thay vào ta có phương trình:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{-27m^3 + 75m^2 - m - 15}{4(3m-1)}\right)y + \frac{-54m^4 + 75m^3 + 41 - 27m - 11}{4(3m-1)} = 0\ (T)$$

$D(7;3) \in (T) \Rightarrow 27m^4 - 78m^3 + 92m^2 - 336m + 99 = 0$

Sử dụng chức năng SOLVE , tìm ra nghiệm duy nhất thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 108. Chọn B.

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là: $A(0;1-4m), B\left(-\sqrt{m}; m^2-4m+1\right), C\left(\sqrt{m}; m^2-4m+1\right)$

Tứ giác $OBAC$ đã có $OB = OC, AB = AC$. Vậy tứ giác $OBAC$ là hình thoi chỉ cần thêm điều kiện

$$OB = AC \Leftrightarrow m+\left(m^2-4m+1\right)^2 = m+m^4 \Leftrightarrow \left(m^2-4m+1\right)^2 - m^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2-4m+1-m^2\right)\left(m^2-4m+1+m^2\right) = 0 \Leftrightarrow (1-4m)\left(2m^2-4m+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$ (thỏa mãn).

Câu 109. Chọn A.

Ta có **:** $y' = -3x^2+6x+3\left(m^2-1\right) = -3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$.

$g(x) = x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta' = m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt$\Leftrightarrow$ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow$ $m \neq 0$.

(1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1\pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m; -2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m; -2+2m^3\right)$.

Ta có: $OA\left(1-m;-2-2m^3\right) \Rightarrow OA^2 = (1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$OB\left(1+m;-2+2m^3\right) \Rightarrow OB^2 = (1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi :

$$OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow (1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2 = (1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -4m+16m^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m = \pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 110. Chọn D.

$y' = 3x^2-6mx = 3x(x-2m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right. .$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi : $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right)$, $B\left(2m; -m^3\right)$.

Ta có: $OA\left(0;3m^3\right) \Rightarrow OA = 3\left|m^3\right|$. (2)

Ta thấy $A \in Oy \Rightarrow OA \equiv Oy \Rightarrow d(B,OA) = d(B,Oy) = 2|m|$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot d(B,OA) = 3m^4$.

Do đó: $S_{\Delta OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4=48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ (thỏa mãn (1)).

Câu 111. Chọn A.

Ta có : $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left[x^2-(m+1)\right]$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi :

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1.\ (*)$

Khi đó, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{m+1} \\ x=\sqrt{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;m) \\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right), \\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \end{cases}$

(vai trò của B , C trong bài toán là như nhau) nên ta giả sử :

$B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$).

Ta có : $OA(0;m) \Rightarrow OA=|m|$; $\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right) \Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$.

Do đó $OA=BC \Leftrightarrow |m|=2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2-4m-4=0\ (\Delta'=8) \Leftrightarrow m=2\pm 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn $(*)$).

Vậy $m=2\pm 2\sqrt{2}$.

Câu 112. Chọn D.

$y'=3x^2-6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;\,4m^3);\ B(2m;\,0) \Rightarrow AB=(2m;\,-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I\,(m;\,2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng

$(d): y=x$ và $I\in(d) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 113. Chọn C.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0, \forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1;2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1;-2-2m)$

Ta có $OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 114. Chọn A.

Ta có: $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2 \end{array}\right.$

Hàm số (C) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$ (*) . Với điều kiện (*) gọi ba điểm cực trị là:

$A(0;1)$; $B\left(-m;1-m^4\right)$;$C\left(m;1-m^4\right)$. Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì sẽ vuông cân tại đỉnh A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC .

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-m;-m^4\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(m;-m^4\right)$; $\overrightarrow{BC}=(2m;0)$.

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4m^2 = m^2 + m^8 + \left(m^2+m^8\right)$

$\Leftrightarrow 2m^2\left(m^4-1\right)=0; \Rightarrow m^4 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy với $m=\pm 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a}+1=0 \Leftrightarrow -m^6+1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Câu 115. Chọn D.

Ta có: $y' = m(3x^2-6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=3m-3 \\ x=2 \Rightarrow y=-m-3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3); B(2;-m-3)$.

Ta có : $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20 \Leftrightarrow 11m^2+6m-17=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 116. Chọn A.

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1 : 2x+y=0$ có $VTPT\ \vec{n}_1(2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta: x+my+3=0$ có $VTPT\ \vec{n}_2(1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta,\Delta_1) = \left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 25\left(m^2+4m+4\right)=5.16.\left(m^2+1\right) \Leftrightarrow 11m^2-20m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$

Câu 117. Chọn C.

Ta có $y'=4x^3-8(m-1)x=4x\left(x^2-2(m-1)\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2(m-1) \end{array}\right.$ nên hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>1$.

Với đk $m>1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;2m-1), B\left(\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right), B\left(-\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right)$.

Ta có: $\begin{matrix} AB^2 = AC^2 = 2(m-1)+16(m-1)^4 \\ BC^2 = 8(m-1) \end{matrix}$

Để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều thì:

$AB = AC = BC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(m-1)+16(m-1)^4 = 8(m-1)$

$\Leftrightarrow 8(m-1)^4 - 3(m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)\left[8(m-1)^3 - 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m = 1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có: $m = 1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a} + 3 = 0 \Leftrightarrow -8(m-1)^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Câu 118. Chọn B.

Ta có: $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, hàm số luôn có CĐ, CT

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;\, 2m^3 + 3m^2 + 1)$, $B(m+1;\, 2m^3 + 3m^2)$

Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$.

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất.

Ta có: $d(M, AB) = \dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M, AB) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \min d(M, AB) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $m = 0$.

Chủ đề 1.3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$.

  Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.
- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$.

  Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K (K có thể là khoảng, đoạn, nửa khoảng,..)

1. ***Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sử dụng bảng biến thiên***
   - ✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
   - ✓ ***Bước 2.*** Tìm các nghiệm của $f'(x)$ và các điểm $f'(x)$ trên *K*.
   - ✓ ***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên *K*.
   - ✓ ***Bước 4.*** Căn cứ vào bảng biến thiên kết luận $\min\limits_{K} f(x), \max\limits_{K} f(x)$
2. ***Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số không sử dụng bảng biến thiên***

   ❖ **Trường hợp 1.** Tập K là đoạn $[a;b]$
   - ✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
   - ✓ ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $xi\in[a;b]$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in[a;b]$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
   - ✓ ***Bước 3.*** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
   - ✓ ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

   ❖ **Trường hợp 2.** Tập K là khoảng $(a;b)$
   - ✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
   - ✓ ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
   - ✓ ***Bước 3.*** Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
   - ✓ ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

   Chú ý: *Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 0.$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = 3.$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = 5.$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = 7.$

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là:

A. $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -50.$ **B.** $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = 0.$ **C.** $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -41.$ **D.** $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = 15.$

Câu 3. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2007)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 0.$ **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{27}.$ **C.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -6.$ **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5.$

Câu 4. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

A. $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 64.$ **B.** $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 1.$ **C.** $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 0.$ **D.** $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 9.$

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nữa khoảng $[-4; +\infty)$ là:

A. $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -8.$ **B.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -11.$ **C.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -17.$ **D.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -9.$

Câu 6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;3]} y = -3.$ **B.** $\min\limits_{[0;3]} y = \frac{1}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[0;3]} y = -1.$ **D.** $\min\limits_{[0;3]} y = 1.$

Câu 7. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 6.$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = \frac{13}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = -6.$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = \frac{25}{4}.$

Câu 8. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y = -1.$ **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y = 3.$ **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y = 5.$ **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y = \frac{-7}{3}.$

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$ là:

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -1.$ **B.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 1.$ **C.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 9.$ **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 10.$

Câu 10. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\max\limits_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = 0.$ **B.** $\max\limits_{[-1;1]} y = 1$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = -3.$

C. $\max\limits_{[-1;1]} y = 3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = 1.$ **D.** $\max\limits_{[-1;1]} y = 0$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}.$

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4$ trên đoạn $[1;5]$ là:

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** -4. **D.** $-\frac{10}{3}$.

Câu 12. Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\,2]$ lần lượt là:

Câu này nội dung lặp câu 4, đề nghị bỏ

A. $9;0$. **B.** $9;\,1$. **C.** $2;\,1$. **D.** $9;-2$.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{x^2-3}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3;\,4]$:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{2}$.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{13}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 6.

Câu 15. Hàm số $y=x^2+2x+1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ lần lượt là $y_1;\,y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ bằng:

A. 5. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 16. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+1$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $x_1;\,x_2$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 17. Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x. Giá trị của x là:

A. $x=3$. **B.** $x=0$ hoặc $x=2$.
C. $x=0$. **D.** $x=-2$ hoặc $x=2$.

Câu 18. Hàm số $y=(x-1)^2+(x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** -1. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1;e]$ bằng là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{e}$. **D.** e.

Câu 20. Hàm số $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;0]$ lần lượt tại $x_1;\,x_2$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 21. Hàm số $y=\sqrt{x^2+1}+x^2$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}-1;\ 0$. **B.** $\sqrt{2}+1;0$. **C.** $1;\ -1$. **D.** $1;0$.

Câu 22. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2004)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$ là:

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=2$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2002)**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2}\cos 2x+4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=4-\sqrt{2}$. **B.** $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=2\sqrt{2}$. **C.** $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}$. **D.** $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=0$.

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\cos x-\cos 5x$ với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4$. **B.** $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{2}$. **C.** $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{3}$. **D.** $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=-1$.

Câu 25. Hàm số $y=\sin x+1$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 26. Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ bằng:

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 27. Hàm số $y=\tan x+x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** 1.

Câu 28. Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 2$. **B.** $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$. **C.** $0;1$. **D.** $-1;\ 1$.

Câu 29. Hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $3;-4$. **B.** $1;\ 0$. **C.** $1;-1$. **D.** $0;-1$.

Câu 30. Hàm số $y=\sin^2 x+2$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt bằng:

A. $0;\ 2$. **B.** $1;\ 3$. **C.** $1;\ 2$. **D.** $2;\ 3$.

Câu 31. Hàm số $y=-9\sin x-\sin 3x$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt là:

B. $8;\ 0$. **A.** $0;\ -8$. **C.** $1;\ -1$. **D.** $0;\ -1$.

Câu 32. Hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $0;\ -1$. **B.** $\sqrt{3};\ 0$. **C.** $\sqrt{3};\ -1$. **D.** $2;-2$.

Câu 33. Hàm số $y=\cos^2 x-2\cos x-1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt bằng $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** 1.

Câu 34. Hàm số $y=\cos 2x+2\sin x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 0.

Câu 35. Hàm số $y=\cos 2x-4\sin x+4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}; 0$. **B.** $5; 1$. **C.** $5; -1$. **D.** $9; 1$.

Câu 36. Hàm số $y=\tan x+\cot x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 37. Hàm số $y=\cos x(\sin x+1)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt là:

A. ± 1. **B.** ± 2. **C.** $\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $2; 0$.

Câu 38. Hàm số $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Khi đó hiệu y_1-y_2 có giá trị bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x(x^2-x-1)$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\min\limits_{[0;2]} y=-2e$. **B.** $\min\limits_{[0;2]} y=e^2$. **C.** $\min\limits_{[0;2]} y=-1$. **D.** $\min\limits_{[0;2]} y=-e$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x(x^2-3)$ trên đoạn $[-2;2]$

A. $\min\limits_{[-2;2]} y=e^2$. **B.** $\min\limits_{[-2;2]} y=-2e$. **C.** $\min\limits_{[-2;2]} y=e^{-2}$. **D.** $\min\limits_{[-2;2]} y=-4e$.

Câu 41. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=e^x+4e^{-x}+3x$ trên đoạn $[1;2]$ bằng

A. $\max\limits_{[1;2]} y=e^2+\frac{4}{e^2}+6$. **B.** $\max\limits_{[1;2]} y=e+\frac{4}{e}+3$.

C. $\max\limits_{[1;2]} y=6e+3$. **D.** $\max\limits_{[1;2]} y=5$.

Câu 42. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x.e^{-2x}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

A. $\max\limits_{[0;1]} y=1$. **B.** $\max\limits_{[0;1]} f(x)=\frac{1}{e^2}$. **C.** $\max\limits_{[0;1]} f(x)=0$. **D.** $\max\limits_{[0;1]} f(x)=\frac{1}{2e}$.

Câu 43. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2-\ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2;0]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{17}{4}-\ln 10$. **B.** $\frac{17}{4}-\ln 7$. **C.** $\frac{17}{4}-\ln\frac{5}{2}\frac{28}{27}$. **D.** $\frac{15}{4}-\ln 10\,2$.

Câu 44. Hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Khi đó $M-m$ bằng

A. $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. **D.** – 1.

Câu 45. Hàm số $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Khi đó $M.m$ bằng

A. $-3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 46. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** – 1.

Câu 47. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là:

A. – 1. **B.** 1. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 48. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=5$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3+\sqrt{5}$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

Câu 50. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{2x^2+1}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\sqrt{2}$.

Câu 51. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}-4\sqrt{(x+4)(4-x)}+5$ bằng

A. $\max\limits_{[-4;4]} y=10$. **B.** $\max\limits_{[-4;4]} y=5-2\sqrt{2}$. **C.** $\max\limits_{[-4;4]} y=-7$. **D.** $\max\limits_{[-4;4]} y=5+2\sqrt{2}$.

Câu 52. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$ bằng

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y=4$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\frac{-3}{2}$. **C.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y=3$. **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y=-1$.

Câu 53. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin^4 x+\cos^2 x+3$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=5$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\frac{31}{8}$.

Câu 54. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^8 x+\cos^4 2x$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{28}{27}$. **B.** 4. **C.** $\frac{82}{27}$. **D.** 2.

Câu 55. Gọi M là giá trị lớn nhất và *m* là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{20}x+\cos^{20}x$. Khi đó *M.m* bằng

A. $\frac{1}{512}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{513}{512}$.

Câu 56. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất. **B.** có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
C. có giá trị nhỏ nhất bằng -1. **D.** có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 57. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 58. Hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$; 1. **B.** 1; 0. **C.** 2; $\sqrt{2}$. **D.** 2; 1.

Câu 59. Cho hàm số $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3}$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$.

Câu 60. Gọi $y_1; y_2$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$. Khi đó tích $y_1.y_2$ là bao nhiêu ?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 61. Hàm số $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;-3]$ bằng:

A. $-\frac{13}{12}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $-\frac{47}{60}$. **D.** $-\frac{11}{6}$.

Câu 62. Cho hàm số $y=x-\sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 63. Hàm số $y=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất lần lượt tại hai điểm có hoành độ:

A. 0. **B.** ± 1. **C.** $\pm\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 64. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 1$. **B.** $0;\ 2$. **C.** $\frac{1}{2};\ 1$. **D.** $0;\ 1$.

Câu 65. Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Câu 66. Hàm số $y=\frac{}{\sqrt{1+2\sin x.\cos x}}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $x=\frac{\pi}{4}$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}$. **C.** $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$. **D.** $x=\frac{\pi}{3}$.

Câu 67. Hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $1;-1$. **B.** $2;0$. **C.** $\frac{1}{4};-1$. **D.** $1;\frac{1}{4}$.

Câu 68. Hàm số $y=\left(x^2+2x+3\right)\left(x^2+2x-2\right)$ có giá trị lớn nhất là:

A. có giá trị lớn nhất là 0. **B.** có giá trị lớn nhất là -8.
C. có giá trị lớn nhất là 2. **D.** không có giá trị lớn nhất.

Câu 69. Hàm số $y=\frac{x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 70. Hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;3]$ là:

A. $10;-\frac{9}{4}$. **B.** $120;\ 1$. **C.** $10;\ -1$. **D.** $120;\ -1$.

Câu 71. Hàm số $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}.\sqrt{x+3}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là:

A. $2\sqrt{2}-2;\ 2$. **B.** $2\sqrt{2}+2;\ 2$. **C.** $2\sqrt{2};\ 2$. **D.** $2;\ 0$.

Câu 72. Hàm số $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ là:

A. $2\sqrt{2}+4;2$. **B.** $2\sqrt{2}-2;2$. **C.** $2\sqrt{2};\ 2$. **D.** $4;\ 2$.

Câu 73. Hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\ 63]$ là:

A. $2;12$. **B.** $1;2$. **C.** $0;\ 2$. **D.** $0;12$.

Câu 74. Hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+3}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng

A. $x=-\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2}$. **B.** $x=\frac{\pi}{6};\ x=\frac{\pi}{2}$. **C.** $x=\frac{\pi}{6};\ x=-\frac{\pi}{2}$. **D.** $x=0;\ x=\frac{\pi}{2}$.

Câu 75. Hàm số $y=x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $3;\frac{112}{9}$. **B.** $1;4$. **C.** $1;\frac{112}{9}$. **D.** $4;\frac{112}{9}$.

Câu 76. Hàm số $y = x^8 + \left(x^4 - 1\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[1;\, 2\right]$ lần lượt tại hai điểm có hoành độ $x_1; x_2$. Khi đó tích $x_1.x_2$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 15. **D.** 0.

Câu 77. Hàm số $y = x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ giá trị nhỏ nhất lần lượt bằng:

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 78. Hàm số $y = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\, 4\right]$ lần lượt là:

A. $\dfrac{8}{3}; 0$. **B.** $\dfrac{8}{3}; -\dfrac{8}{3}$. **C.** $0; -\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{24}{5}; 0$.

Câu 79. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm^2. **B.** 4 cm^2. **C.** 16 cm^2. **D.** 8 cm^2.

Câu 80. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3}$ cm **B.** $4\sqrt{3}$ cm **C.** 24 cm **D.** $8\sqrt{3}$ cm

Câu 81. Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

A. 5; – 8. **B.** 1; – 12. **C.** $\dfrac{-13}{2}; \dfrac{13}{2}$. **D.** 6; – 7.

Câu 82. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)

Câu 83. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$)?

A. $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Câu 84. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

A. 12. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 32.

Câu 85. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

A. 100 mg. **B.** 20 mg. **C.** 30 mg. **D.** 0 mg.

Câu 86. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng

A. 6 km/h. **B.** 8 km/h. **C.** 7 km/h. **D.** 9 km/h.

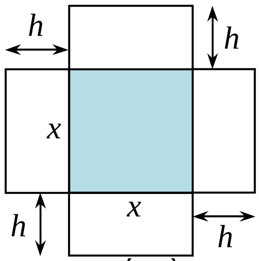
Câu 87. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$, $t=0,1,2,...,25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. Ngày thứ 19. **B.** Ngày thứ 5. **C.** Ngày thứ 16. **D.** Ngày thứ 15.

Câu 88. Cho ΔABC đều cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất ?

A. $BM=\dfrac{2a}{3}$. **B.** $BM=\dfrac{3a}{4}$. **C.** $BM=\dfrac{a}{3}$. **D.** $BM=\dfrac{a}{4}$.

Câu 89. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3. Giá trị của x để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng



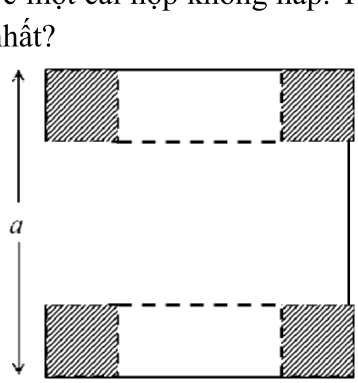
A. 100. **B.** 300.

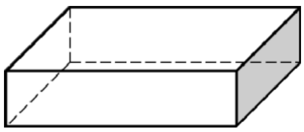
C. 10. **D.** 1000.

Câu 90. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hình trụ có thể tích lớn nhất bằng

A. $\dfrac{4\pi R^3}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Câu 91. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?





A. $\dfrac{5a}{6}$. **B.** $\dfrac{a}{6}$. **C.** $\dfrac{a}{12}$. **D.** $\dfrac{a}{9}$.

Câu 92. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$ là:

A. $M=-1; m=\dfrac{-3}{2}$. **B.** $M=3; m=-1$. **C.** $M=3; m=\dfrac{-3}{2}$. **D.** $M=\dfrac{3}{2}; m=-3$.

Câu 93. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\cos 2x+2\sin x$ là:

A. $M=\dfrac{9}{4}; m=-4$. **B.** $M=4; m=0$. **C.** $M=0; m=-\dfrac{9}{4}$. **D.** $M=4; m=-\dfrac{9}{4}$.

Câu 94. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^4 x-4\sin^2 x+5$ là:

A. $M=2; m=-5$. **B.** $M=5; m=2$. **C.** $M=5; m=-2$. **D.** $M=-2; m=-5$.

Câu 95. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$ là:

A. $M=3; m=-\dfrac{11}{4}$. **B.** $M=\dfrac{11}{4}; m=-3$. **C.** $M=3; m=\dfrac{11}{4}$. **D.** $M=-\dfrac{11}{4}; m=-3$.

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{2\cos^2 x+\cos x+1}{\cos x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M=m+\dfrac{2}{3}$. **B.** $M=m+1$. **C.** $M=\dfrac{3}{2}m$. **D.** $M=m+\dfrac{3}{2}$.

Câu 98. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x+3$ trên đoạn $[0;4]$ là:

A. $-\dfrac{21}{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 99. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 100. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 101. Hàm số $y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 102. Hàm số $y=x+\sqrt{18-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 5. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -5.

Câu 103. Hàm số $y=2\cos^3 x-\dfrac{7}{2}\cos^2 x-3\cos x+5$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 104. Hàm số $y=-2\sin^3 x+3\cos 2x-6\sin x+4$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. -6. **B.** -7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 105. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x\ge 0,\ y\ge 1;\ x+y=3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+2y^2+3x^2+4xy-5x$ lần lượt bằng:

A. 20 và 18. **B.** 20 và 15. **C.** 18 và 15. **D.** 15 và 13.

Câu 106. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 107. Hàm số $y=\sqrt{45+20x^2}+|2x-3|$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. -9. **B.** 8. **C.** 9. **D.** -8.

Câu 108. **(Đề thi Đại học Khối B – 2003)**

Hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $-2\sqrt{2}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 109. (Đề thi Đại học Khối D – 2003)

Hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;\,2]$ lần lượt bằng:

A. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; 0. **B.** $\sqrt{5}$; 0. **C.** $\sqrt{2}$; 0. **D.** $\sqrt{5}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 110. (Đề thi Đại học Khối B – 2004)

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1; e^3\right]$ là :

A. 0. **B.** $\dfrac{9}{e^3}$. **C.** $\dfrac{4}{e^2}$. **D.** $\dfrac{4}{e}$.

Câu 111. (Đề thi Đại học Khối D – 2011)

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn [0;2] lần lượt là:

A. $\dfrac{17}{3}$; 3 **B.** $\dfrac{17}{3}$; – 5. **C.** 3; – 5. **D.** –3; 5.

Câu 112. (Đề thi ĐH Khối D – 2009)

Cho các số thực x , y thõa mãn $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$.

Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là:

A. $M = \dfrac{25}{2}; m = \dfrac{191}{16}$. **B.** $M = 12; m = \dfrac{191}{16}$. **C.** $M = \dfrac{25}{2}; m = 12$. **D.** $M = \dfrac{25}{2}; m = 0$.

Câu 113. (Đề thi ĐH Khối D – 2012)

Cho các số thực x, y thoả mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$.

Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$ là :

A. $m = \dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$. **B.** $m = 16$. **C.** $m = 398$. **D.** $m = 0$.

Câu 114. (Đề thi ĐH Khối A– 2006).

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu **thức** $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$ là:

A. $M = 0$. **B.** $M = 0$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 16$.

Câu 115. (Đề thi ĐH Khối B– 2011).

Cho a , b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = 4\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right)$ là:

A. $m = -10$. **B.** $m = \dfrac{85}{4}$. **C.** $m = \dfrac{-23}{4}$. **D.** $m = 0$.

Câu 116. (Đề thi ĐH Khối D– 2014).

Cho hai số thực dương thỏa mãn $1 \leq x \leq 2;\ 1 \leq y \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{\square 1}{4(x+y-1)}$$

A. $m = 0$. **B.** $m = \dfrac{85}{4}$. **C.** $m = -10$. **D.** $m = \dfrac{7}{8}$.

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D	D	D	A	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	C	A	A	A	A	B	C	D	B	D	B	A	C	C	C	D	D	B

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	D	A	B	A	D	B	C	B	A	D	C	D	C	A	D	B	C	B	C

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn **B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;2) \\ x = -1 \notin (0;2) \end{array}\right.$

$y(1) = 3; y(0) = 5; y(2) = 7$. Do đó $\min\limits_{[0;2]} y = y(1) = 3$

Câu 2. Chọn **C.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;4]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in (-4;4) \\ x = 3 \in (-4;4) \end{array}\right.$

$f(-4) = -41; f(-1) = 40; f(3) = 8; f(4) = 15$. Do đó $\min\limits_{x\in[-4;4]} f(x) = f(-4) = -41$

Câu 3. Chọn **B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \notin (1;3) \\ x = \dfrac{4}{3} \in (1;3) \end{array}\right.$

$f(1) = 0; f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{27}; f(3) = -6$. Do đó $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x) = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{27}$

Câu 4. Chọn **D.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

Xét trên $(0; 2)$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; Khi đó $f(1) = 0; f(0) = 1; f(2) = 9$

Do đó $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 9$

Câu 5. Chọn **B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;+\infty)$

Ta có: $y=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+5$. Đặt $t=x^2+6x$. Khi đó $y=t^2+8t+5$

Xét hàm số $g(x)=x^2+6x$ với $x\geq -4$. Ta có $g'(x)=2x+6;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$g'(x)$			$-$ 0 $+$	
$g(x)$		-8 $\searrow$	-9	$\nearrow$ $+\infty$

Suy ra $t\in[-9;+\infty)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=h(t)=t^2+8t+5$ với $t\in[-9;+\infty)$. Ta có $h'(t)=2t+8$; $h'(t)=0\Leftrightarrow t=-4$; $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-9	-4	$+\infty$
$h(x)$			$-$ 0 $+$	
$h(x)$		14 $\searrow$	-11	$\nearrow$ $+\infty$

Vậy $\min\limits_{[-4;+\infty)} y=-11$

Câu 6. Chọn **C.**

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên $[0;3]$

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với $\forall x\in[0;3]$. $y(0)=-1; y(3)=\dfrac{1}{2}$. Do đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(0)=-1$

Câu 7. Chọn **A.**

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên $[2;4]$

Ta có $y'=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=-3 & \notin(2;4) \\ x=3 & \in(2;4)\end{array}\right.$

Ta có $y(2)=\dfrac{13}{2}; y(3)=6; y(4)=\dfrac{25}{4}$. Do đó $\min\limits_{x\in[2;4]} y=y(3)=6$

Câu 8. Chọn **B.**

Hàm số xác định với $\forall x\in(1;+\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$

Ta có $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$; $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\end{array}\right.$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

Bảng biến thiên

x	1			2		$+\infty$
$f'(x)$	||		$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(2) = 3$

Câu 9. Chọn **C.**

Hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = \dfrac{8x^2-12x-8}{(x^2+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x = -\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Vậy $\max\limits_{R} y = 9 = y(-\frac{1}{2})$

Câu 10. Chọn **C.**

Điều kiện xác định: $5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{4}$. Suy ra hàm số xác định với $\forall x \in [-1;1]$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y' = \dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1;1]$. Do đó $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = 3$; $\min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = 1$

Câu 11. Chọn **A.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Khi đó: $y(1) = -\dfrac{8}{3}$; $y(3) = -4$; $y(5) = \dfrac{8}{3} \Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{8}{3}$

Câu 12. Chọn **A.**

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = 0$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y(1) = 0$; $y(2) = 9$ $\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là $9;0$

Câu 13. Chọn **A.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0; \forall x \in D$.

Khi đó: $y(0) = -\dfrac{1}{2}$; $y(2) = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{4}$.

Câu 14. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có: $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}>0;\forall x\in[3;4]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[3;4]$.

Vậy $\min\limits_{[3;4]} y=y(3)=6$ và $\max\limits_{[3;4]} y=y(4)=\dfrac{13}{2}$.

Câu 15. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=2x+2$; $y'=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1\notin[0;1]$. $y(0)=1; y(1)=4$ suy ra $y_1.y_2=4$.

Câu 16. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=x^2-5x+6$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=3$

Khi đó: $y(1)=\dfrac{29}{6}; y(2)=\dfrac{17}{3}; y(3)=\dfrac{11}{2}\Rightarrow x_1=2; x_2=1\Rightarrow x_1+x_2=3$

Câu 17. Chọn **D.**

TXĐ: $D=[-2;2]$. Ta có: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-2)=0; y(0)=2; y(2)=0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x=\pm2$

Câu 18. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=(x-1)^2+(x+3)^2=2x^2+4x+10$.

Ta có: $y'=4x+4$; $y'=0\Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 19. Chọn **A.**

TXĐ: $D=(0;+\infty)$. Ta có: $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e$

Khi đó: $y(1)=0; y(e)=\dfrac{1}{e}\Rightarrow$ Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 20. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\dfrac{x+2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=-2$

Khi đó: $y(-3)=-\dfrac{4\sqrt{11}}{11}; y(-1)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; y(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-3\end{cases}\Rightarrow x_1.x_2=0$

Câu 21. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x$.

$y'=0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2}+1; y(0)=1; y(1)=\sqrt{2}+1$.

Câu 22. Chọn **D.**

Ta có $y'=2\cos x-4\sin^2x.\cos x=2\cos x(1-2\sin^2x)=2\cos x.\cos 2x$

Nên $y'=0\Leftrightarrow 2\cos x.\cos 2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right.$

Trên $(0;\pi)$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

$y(0)=0; y(\pi)=0; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}; y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\max\limits_{[0;\pi]} y=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 23. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y=-2\sqrt{2}\sin^2x+4\sin x+\sqrt{2}$

Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y=g(t)=-2\sqrt{2}t^2+4t+\sqrt{2}$ trên đoạn $[0;1]$

$g'(t)=-4\sqrt{2}t+4=4(1-\sqrt{2}t)$; $g'(t)=0\Leftrightarrow 4(1-\sqrt{2}t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}\in(0;1)$

$g(0)=\sqrt{2}; g(1)=4-\sqrt{2}; g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}$

Do đó $\min\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}; \left(y=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin x=0, \sin 0=0\right)$

Câu 24. Chọn **A.**

Ta có $y=5\cos x-\cos 5x$ nên $y'=-5\sin x+5\sin 5x$

$y'=0\Leftrightarrow \sin 5x=\sin x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=x+k2\pi\\ 5x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.$

Trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

$y(0)=4; y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}; y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4=y(0)$

$\lfloor \quad 4\ 4 \rfloor$

Câu 25. Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\cos x;\ y'=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó: $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 26. Chọn **A.**

TXĐ: $D=R$. Ta có: $y'=-2\sin 2x$; $y'=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2};(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi\right\}$. Do đó: $y(0)=-2;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\Rightarrow \min y=-4$

Câu 27. Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$. Ta có: $y'=\frac{1}{\cos^2 x}+1>0;\forall x\in D$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $D\Rightarrow \min y=0$.

Câu 28. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Rightarrow \min y=-\sqrt{2};\ \max y=\sqrt{2}$

Câu 29. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=3\sin x-4\sin^3 x=\sin 3x\Rightarrow \min y=-1;\ \max y=1$.

Câu 30. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $0\le\sin^2 x\le 1\Leftrightarrow 2\le\sin^2 x+2\le 3\Rightarrow \min y=2;\ \max y=3$.

Câu 31. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-9\cos x-3\cos 3x=-9\cos x-12\cos^3 x+9\cos x=-12\cos^3 x$

$y'=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Vì: $x\in[0;\pi]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Do đó: $y(0)=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-8;\ y(\pi)=0\Rightarrow \min y=-8;\ \max y=0$

Câu 32. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Mà $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 2\Rightarrow \min y=-2;\ \max y=2$

Câu 33. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin x\cos x+2\sin x=-2\sin x(\cos x-1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2\sin x\left(\cos x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right.\left(k \in Z\right)$$

Vì $x \in [0;\pi] \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$.

Khi đó: $y(0) = -2;\ y(\pi) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1.y_2 = -4$.

Câu 34. Chọn **A.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin 2x + 2\cos x = -2\cos x(2\sin x - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2\cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vì $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{3}{2} \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

Câu 35. Chọn **C.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin 2x - 4\cos x = -4\cos x(\sin x + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vì $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó $y(0) = 5;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

Câu 36. Chọn **C.**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$. Ta có: $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \dfrac{-\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. Vì $x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right] \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó: $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2;\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 37. Chọn **C.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -\sin x(\sin x + 1) + \cos^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Vì $x \in [0;\pi] \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Khi đó: $y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}; y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}; y(\pi) = -1$

Câu 38. Chọn **D.**

TXĐ: $D = R$

Ta có: $y' = 3\cos x\sin^2 x - 3\sin x\cos^2 x = 3\sin x\cos x\left(\sin x - \cos x\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3\sin x\cos x\left(\sin x - \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{k\pi}{2}\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = \frac{\pi}{4}\\ x = \frac{\pi}{2}\\ x = \pi\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}y(0) = 1\\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\\ y(\pi) = -1\end{cases}$$

$\Rightarrow y_1 = 1;\ y_2 = -1 \Rightarrow y_1 - y_2 = 2$

Câu 39. Chọn **D.**

Hàm số $y = e^x(x^2 - x - 1)$ liên tục trên đoạn $[0;\ 2]$

Ta có $y' = \left(e^x\right)'(x^2 - x - 1) + e^x(x^2 - x - 1)' = e^x(x^2 - x - 1) + e^x.(2x - 1) = e^x(x^2 + x - 2)$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \in (0;\ 2)\\ x = -2 \notin (0;\ 2)\end{array}\right.$

Ta có, $f(1) = -e;\ f(0) = -1;\ f(2) = e^2$. Vậy: $\min\limits_{x\in[0;2]} y = y(1) = -e$

Câu 40. Chọn **B.**

Hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ liên tục trên đoạn $[-2;\ 2]$

Ta có $y' = \left(e^x\right)'(x^2 - 3) + e^x(x^2 - 3)' = e^x(x^2 - 3) + e^x.2x = e^x(x^2 + 2x - 3)$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \in (-2;\ 2)\\ x = -3 \notin (-2;\ 2)\end{array}\right.$

Ta có, $f(1) = -2e;\ f(-2) = e^{-2};\ f(2) = e^2$. Vậy, $\min\limits_{x\in[-2;2]} y = y(1) = -2e$

Câu 41. Chọn **A.**

Hàm số $y = e^x + 4e^{-x} + 3x$ liên tục trên đoạn $[1;\ 2]$

Ta có: $y' = e^x - 4e^{-x} + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 3e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1;\ 2]$

Ta có, $y(1) = e + \frac{4}{e} + 3;\ y(2) = e^2 + \frac{4}{e^2} + 6$. Vậy: $\max\limits_{x\in[1;2]} y = y(2) = e^2 + \frac{4}{e^2} + 6$

Câu 42. Chọn **D.**

Hàm số $f(x) = x.e^{-2x}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có: $f'(x) = e^{-2x}(1 - 2x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0;1)$

$f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$; $f(1) = \frac{1}{e^2}$. Vậy $\max f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$

$\left(2\right) \quad 2e \qquad e \qquad {}_{x\in[0;1]} \qquad \left(2\right) \quad 2e$

Câu 43. Chọn **A.**

Hàm số $f(x)=x^2-\ln(1-2x)$ liên tục trên đoạn $[-2;0]$

Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{2}{1-2x}=\dfrac{-2(2x+1)(x-1)}{1-2x}$

Suy ra trên khoảng $(-2;0)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Có $f(0)=0$; $f(-2)=4-\ln5$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\ln2$

$M=\max\limits_{x\in[-2;0]}f(x)=f(-2)=4-\ln5$; $m=\min\limits_{x\in[-2;0]}f(x)=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}-\ln2$

Vậy: $M+m=\dfrac{17}{4}-\ln10$

Câu 44. Chọn **B.**

- $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2x}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\left(x\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]\right)$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2$. Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]}f(x)=2$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]}f(x)=1$.

Câu 45. Chọn **A.**

- $f'(x)=2\cos x+2\cos2x=4\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2}$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\\\cos\dfrac{3x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi\\x=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.\left(x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]\right)$
- $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi)=0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-2$

Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}f(x)=-2$.

Câu 46. Chọn **D.**

- $y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2x}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\pi\left(x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$
- Bảng biến thiên:

x	$\dfrac{\pi}{2}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	|| $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||

- Vậy $\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)}y=-1$ và $\min\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)}y$ không tồn tại.

Câu 47. Chọn **B.**

- $y' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\left(x \in (0;\pi)\right)$
- Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
y'	||	$-$	0	$+$	||
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Vậy $\min\limits_{(0;\pi)} y = 1$ và $\max\limits_{(0;\pi)} y$ không tồn tại.

Câu 48. Chọn **C.**

TXĐ: $D = [-1;1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; với $-1 < x < 1$. $y' = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y(\pm 1) = 0; y\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}; y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Do đó $M = \max\limits_{[-1;1]} y = y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$; $m = \min\limits_{[-1;1]} y = y\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow M + m = 0$

Câu 49. Chọn **B.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$

Câu 50. Chọn **A.**

TXĐ $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{x\in R} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ khi $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 51. Chọn **D.**

Điều kiện $-4 \le x \le 4$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = x+4+4-x+2\sqrt{(x+4)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(4-x)} = \dfrac{t^2-8}{2}$

Ta có $y = t - 4\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right) + 5 = -2t^2 + t + 21 = f(t)$

Tìm điều kiện của *t*: Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ với $x \in [-4;4]$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $g(-4) = 2\sqrt{2}$; $g(0) = 4$; $g(4) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[-4;4]} g(x) = 2\sqrt{2}$; $\max\limits_{x\in[-4;4]} g(x) = 4 \Rightarrow t \in [2\sqrt{2};4]$

$f'(t) = -4t + 1 < 0\ \forall t \in [2\sqrt{2};4] \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[2\sqrt{2};4]$

$\underset{[-4;4]}{Max}\, y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$

Câu 52. Chọn **C.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

Ta tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1;1]$. Đó cũng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 4t + 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2} \in (-1;1)$; $f(-1) = -1$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$; $f(1) = 3$

$\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t) = f(1) = 3$. Do đó $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} y = 3$

Câu 53. Chọn **D.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Biến đổi $y = 2\sin^4 x - \sin^2 x + 4$. Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \le t \le 1$

Xét hàm số $f(t) = 2t^4 - t^2 + 4$ liên tục trên đoạn $[0;1]$. $f'(t) = 8t^3 - 2t = 2t(4t^2 - 1)$

Trên khoảng $(0;1)$ phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Ta có: $f(0) = 4$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{31}{8}$; $f(1) = 5$

Vậy $\min\limits_{t\in[0;1]} f(t) = \dfrac{31}{8}$ tại $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \min\limits_{R} y = \dfrac{31}{8}$ *khi* $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

Câu 54. Chọn **C.**

Do $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ nên ta có

$$S = y = 2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4 + \cos^4 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 2x)^4 + \cos^4 2x$$

Đặt $t = \cos 2x$, $-1 \le t \le 1$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $S = g(t) = \frac{1}{8}(1-t)^4 + t^4$, với $-1 \le t \le 1$

Ta có $g'(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^3 + 4t^3$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow (1-t)^3 = 8t^3 \Leftrightarrow 1-t = 2t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

$g(1) = 1$; $g(-1) = 3$; $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

Vậy $m = \min S = \frac{1}{27}$; $M = \max S = 3$ nên $M + m = 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27}$

Câu 55. Chọn **A.**

Nhận xét: Ta quy về hết $\sin^2 x$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \le t \le 1)$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t) = t^{10} + (1-t)^{10}$ với $t \in [0;1]$

$f'(t) = 10t^9 - 10(1-t)^9$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^9 = (1-t)^9 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

$f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{512}$; $f(1) = 1$.

Vậy m= $\min y = \frac{1}{512}$; $M = \max y = 1$ nên $M.m = \frac{1}{512}$

Câu 56. Chọn **D.**

TXĐ: $D = [-1;+\infty)$. Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0,\ \forall x \in (-1;+\infty)$

Bảng biến thiên:

x	-1		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -1$

Câu 57. Chọn **B.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 58. Chọn **C.**

TXĐ: $D=[-1;1]$. Ta có: $y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2};\ y(0)=2;\ y(1)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 , giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 59. Chọn **B.**

TXĐ: $D=[2;+\infty)$. Ta có: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}}<0;\forall x\in[2;+\infty)$

BBT:

x	2		$+\infty$
y'	‖	$-$	
y	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Từ BBT ta thấy hàm số đã cho có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 60. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}<0;\forall x\in D$

BBT:

x	3		4
y'		$-$	
y	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là $y_1=\frac{3}{2};y_2=\frac{5}{6}\Rightarrow y_1.y_2=\frac{5}{4}$.

Câu 61. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0\}$

Ta có: $y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}<0;\forall x\in D$

BBT:

x	-5		-3
y'		$-$	
y	$-\dfrac{47}{60}$	$\searrow$	$\dfrac{-11}{6}$

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\dfrac{47}{60}$.

Câu 62. Chọn **B.**

TXĐ: $D=[1;+\infty)$. Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$

BBT:

x	1		$\dfrac{5}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	0

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 63. Chọn **B.**

TXĐ: $D=[-1;1]$.

Ta có: $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=x\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+x^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2};\ y(0)=2;\ y(1)=\sqrt{2}$.

Câu 64. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0\le\sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\le 1\ \Rightarrow\min y=\dfrac{1}{2}$, $\max y=1$.

Câu 65. Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)=-\cos 2x$

Mà $-1\le\cos 2x\le 1\Leftrightarrow -1\le-\cos 2x\le 1\Rightarrow\max y=1$.

Câu 66. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}=\sqrt{1+\sin 2x}$; $y'=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

$y'=0\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, vì $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$

Khi đó: $y(0)=1;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

Câu 67. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x$

Mà: $0\le\sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\le 1\Rightarrow \min y=\dfrac{1}{4};\max y=1.$

Câu 68. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt $t=x^2+2x+3\ (t\ge 2)$, Khi đó hàm số trở thành: $y=t(t-5)=t^2-5t$

Ta có: $y'=2t-5$; $y'=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

x	2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-6	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, ta thấy hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 69. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt: $t=\sqrt{x^2+1}\ (t\ge 1)\Rightarrow x^2=t^2-1$. Khi đó hàm số trở thành: $y=t-\dfrac{3}{t}\Rightarrow y'=1+\dfrac{3}{t^2}>0\Rightarrow$

Hàm số luôn đồng biến với mọi $t\ge 1\Rightarrow \min y=y(1)=-2$.

Câu 70. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)$

Đặt: $t=x^2-5x+4\left(-\dfrac{9}{4}\le t\le 10\right)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=f(t)=t(t+2)=t^2+2t\Rightarrow f'(t)=2t+2=0\Leftrightarrow t=-1$

BBT:

t	$-\frac{9}{4}$		-1		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	120

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 120 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

Câu 71. Chọn **B.**

TXĐ: $D=[-3;1]$. Đặt: $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ $\left(2\le t\le 2\sqrt{2}\right)\Rightarrow\sqrt{1-x}\sqrt{3+x}=\dfrac{t^2-4}{2}$

Khi đó phương trình trở thành: $y=\dfrac{t^2}{2}+t-2\Rightarrow y'=t+1>0;\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \min y=y(2)=2;\ \max y=y\left(2\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}$.

Câu 72. Chọn **A.**

TXĐ: $D=[-2;2]$.

Đặt: $t=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$ $\left(2\le t\le 2\sqrt{2}\right)\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}=t^2-4$

Khi đó hàm số trở thành: $y=f(t)=t^2+t-4\Rightarrow f'(t)=2t+1>0;\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \min y=f(2)=2;\ \max y=f\left(2\sqrt{2}\right)=4+2\sqrt{2}$.

Câu 73. Chọn **A.**

TXĐ: $D=[-1;+\infty)$. Đặt $t=\sqrt[6]{x+1}$ $(1\le t\le 2)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^3+t^2\Rightarrow y'=3t^2+2t>0;\forall t\in[1;2]$

$\Rightarrow \min y=y(1)=2;\ \max y=y(2)=12$.

Câu 74. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt $t=\sin x;(-1\le t\le 1)$. Khi đó hàm số trở thành:

$y=\dfrac{t+1}{t^2+3}\Rightarrow y'=\dfrac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+3\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3(l)\end{array}\right.$. Do đó $y(-1)=0;\ y(1)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$

Câu 75. Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}\left(2 \le t \le \dfrac{10}{3}\right) \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \in \left[2; \dfrac{10}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t \in \left[2; \dfrac{10}{3}\right]$. (chỗ này còn thiếu)

Câu 76. Chọn **B.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = x^4 - 1\ (0 \le t \le 15)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = (t+1)^2 + t^2 = 2t^2 + 2t + 1 \Rightarrow y' = 4t + 2 > 0; \forall t \in [0;15]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;15]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = 15 \Leftrightarrow x = 2$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 77. Chọn **A.**

TXĐ: $D = (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x + 2}\ (t \ge 0)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \ge 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t \ge 0 \Rightarrow \min y = y(0) = -2$.

Câu 78. Chọn **A.**

TXĐ: $D = [0; +\infty)$. Đặt $t = \sqrt{x}; \left(x \in [0;4] \Rightarrow 0 \le t \le 2\right)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = t + \dfrac{t}{t+1} \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$ $\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall t \in [0;2] \Rightarrow \min y = y(0) = 0; \max y = y(2) = \dfrac{8}{3}$.

Câu 79. Chọn **C.**

Cách 1: Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b; $0 < a, b < 8$.

Ta có: $2(a + b) = 16 \Leftrightarrow a + b = 8 \Leftrightarrow b = 8 - a$

Diện tích: $S(a) = a(8 - a) = -a^2 + 8a$; $S'(a) = -2a + 8$; $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$

Bảng biến thiên:

a	0		4		8
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$	0	↗	16	↘	0

Cách 2

Áp dụng Côsi: $a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \le 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 4$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi cạnh bằng 4

Câu 80. Chọn **A.**

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b; $0 < a, b \le 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \dfrac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \dfrac{48}{a}\right)$

$P'(a) = 2\left(1 - \dfrac{48}{a^2}\right)$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0		$4\ 3$		48
$P'(a)$		$-$	0	$+$	
$P(a)$		$\searrow$	$16\ 3$	$\nearrow$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$

  $\Leftrightarrow$ chu vi nhỏ nhất: $2(a + b) = 16\sqrt{3}$
- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 81. Chọn **C.**

Gọi một trong hai số phải tìm là x, số còn lại: $x + 13$.

Tích hai số $P(x) = x(x+13) = x^2 + 13x$. $P'(x) = 2x + 13$, $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-13}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{-13}{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tích của chúng bé nhất bằng $\dfrac{-169}{4}$ khi hai số là $\dfrac{13}{2}$ và $\dfrac{-13}{2}$.

Câu 82. Chọn **A.**

Vận tốc của chuyển động là $v = s'$ tức là $v(t) = 12t - 3t^2$, $t > 0$

$v'(t) = 12 - 6t$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$\Leftrightarrow$ Max $v(t) = 12$ khi $t = 2$. Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 83. Chọn **A.**

Cạnh góc vuông x, $0 < x < \dfrac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2-x^2}$

Diện tích tam giác $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$. $S'(x)=\frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2-2ax}}$; $S'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	↘	

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 84. Chọn **A.**

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng: $f(n)=nP(n)=480n-20n^2$ (gam). $f'(n)=480-40n=0 \Leftrightarrow n=12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		↗	$f(12)$	↘	

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả 12 con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

Câu 85. Chọn **B.**

Ta có: $G(x)=0.75x^2-0.025x^3, x>0$; $G'(x)=1.5x-0.075x^2$; $G'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=20$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		↗	100	↘	

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

Câu 86. Chọn **D.**

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\frac{300}{v-6}(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\frac{300}{v-6}=300c\frac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\frac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v)=0 \Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		↘	$E(9)$	↗	

Cá phải bơi với vận tốc 9 (km/h) thì ít tiêu hao năng lượng nhất.

Câu 87. Chọn **D.**

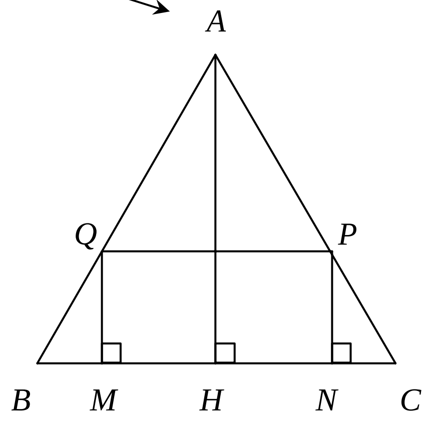
$f'(t) = 90t - 3t^2$; $f''(t) = 90 - 6t$, $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		↗	675	↘	

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

Câu 88. Chọn **D.**



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$.

Đặt $BM = x \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$

Ta có: $MN = 2MH = a - 2x$, $QM = BM \tan 60^0 = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3} = a\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$

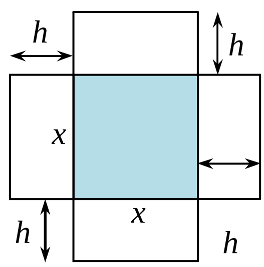
$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x)$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	↘	

Vị trí điểm M: $BM = \frac{a}{4}$

Câu 89. Chọn **C.**



Thể tích của hộp là: $V = x^2h = 500(cm^3)$. Do đó $h = \frac{500}{x^2}$, $x > 0$.

Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là:

$S(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}$, $x > 0$

$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	300	$\nearrow$	

Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm).

Câu 90. Chọn **B.**

Gọi chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. Khi đó, $V=\pi r^2 h$. Vì $r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$ nên $V=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right)$.

$V(h)=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right), h\in(0;2R)$; $V'(h)=\pi\left(R^2-\frac{3h^2}{4}\right)$; $V'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

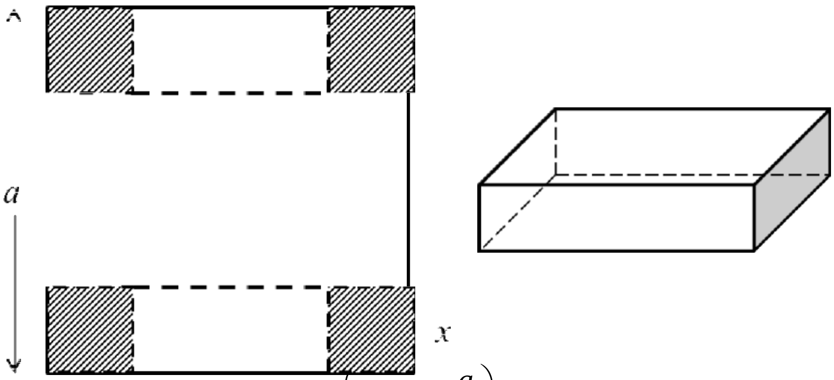
Bảng biến thiên:

h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích hình trụ là $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 91. Chọn **B.**



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x)=x(a-2x)^2\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

$V'(x)=(a-2x)^2+x.2(a-2x).(-2)=(a-2x)(a-6x)$; $V'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{6}\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Vậy trong khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ có 1 điểm cực đại duy nhất là $x=\frac{a}{6}$ tại đó $V(x)=\frac{2a^3}{27}$.

Câu 92. Chọn **C.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1$. Khi đó $y=f(t)=2t^2+2t-1$

$f'(t)=4t+2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}\in[-1;1]\Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-3}{2}; f(-1)=-1; f(1)=3$

Vậy $\min\limits_{R} y=\frac{-3}{2}, \max\limits_{R} y=3.$

Câu 93. Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y=2(1-2\sin^2 x)+2\sin x=-4\sin^2 x+2\sin x+2$

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1$, khi đó $y=f(t)=-4t^2+2t+2$

$f'(t)=-8t+2, f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\in[-1;1]\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}; f(-1)=-4; f(1)=0$

Vậy $\min\limits_{R} y=-4, \max\limits_{R} y=\frac{9}{4}$

Câu 94. Chọn **B.**

Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=t^2-4t+5$. $f'(t)=2t-4; f'(t)=0\Leftrightarrow t=2\notin[0;1]$

$f(0)=5; f(1)=2$. Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2, \max\limits_{\mathbb{R}} y=5$

Câu 95. Chọn **C.**

$y=\sin^4 x-\sin^2 x+3$. Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=t^2-t+3$

$f'(t)=2t-1; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in[0;1]\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}; f(0)=3; f(1)=3$

Vậy $\min\limits_{R} y=\frac{11}{4}, \max\limits_{R} y=3$

Câu 96. Chọn **D.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=|\cos x|, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\frac{2t^2+t+1}{t+1}$

$f'(t)=\frac{2t^2+4t}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-2\notin[0;1]\end{array}\right.\Rightarrow f(0)=1, f(1)=2$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1, \max\limits_{\mathbb{R}} y=2$

Câu 97. Chọn **B.**

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1]\end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1, f(-1)=0, f(1)=\dfrac{2}{3}$. Vậy $M=1$, $m=0$

Câu 98. Chọn **D.**

Ta có $y'=x^2-x-6 \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in(0;4)\end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y(0)=3, y(4)=-\dfrac{23}{3}, y(3)=-\dfrac{21}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x+3$ trên đoạn $[0;4]$ là 3.

Câu 99. Chọn **C.**

Hàm số $y=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ có tập xác định $D=[-3;1]$

$y'=\dfrac{-2x^2-6x}{\sqrt{-x^2-2x+3}} \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in(-3;1)\end{cases} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y(-3)=0, y(1)=0, y(0)=3\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ là 0

Câu 100. Chọn **B.**

Hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ có tập xác định $D=[2;4]$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in(2;4)\end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y(2)=\sqrt{2}, y(3)=2, y(4)=\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ là 2

Câu 101. Chọn **C.**

$y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1=\dfrac{3\cos 2x+5}{2} \Rightarrow 1\le y\le 4$

Vậy hàm số $y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1$ có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 102. Chọn **C.**

Hàm số $y=x+\sqrt{18-x^2}$ có tập xác định $D=\left[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$

$y'=\dfrac{\sqrt{18-x^2}-x}{\sqrt{18-x^2}} \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow x=3$

$\Rightarrow y\left(-3\sqrt{2}\right)=-3\sqrt{2}, y\left(3\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}, y(3)=6$

Vậy hàm số $y=x+\sqrt{18-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng 6.

Câu 103. Chọn **B.**

Đặt $t=\cos x\,(-1\le t\le 1)$. Xét hàm $y=2t^3-\dfrac{7}{2}t^2-3t+5$ trên đoạn $[-1;1]$

$y'=6t^2-7t-3 \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ t\in(-1;1)\end{cases} \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3};\ y(-1)=\dfrac{5}{2}, y(1)=\dfrac{1}{2}, y\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{299}{54}$.

Vậy hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{7}{2}\cos^2 x - 3\cos x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 104. Chọn **D.**

$y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4 = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 7$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$. Xét hàm $y = -2t^3 - 6t^2 - 6t + 7$ trên đoạn $[-1;1]$

$y' = -6t^2 - 12t - 6 \Rightarrow y' = 0$ vô nghiệm. Ta có: $y(-1) = 9, y(1) = -7$

Vậy hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 105. Chọn **B.**

Ta có $y = 3 - x \ge 1 \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow x \in [0; 2]$

Khi đó $P = x^3 + 2(3-x)^2 + 3x^2 + 4x(3-x) - 5x = x^3 + x^2 - 5x + 18$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 18$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

$f(0) = 18, f(1) = 15, f(2) = 20$

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng 20 và 15.

Câu 106. Chọn **C.**

Ta có: $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}$. Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

khi hàm số $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \max\limits_{(0;+\infty)} y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Câu 107. Chọn **C.**

Áp dụng bất đẳng thức **B. C.** S ta có:

$$\sqrt{45 + 20x^2} = \sqrt{5(9 + 4x^2)} = \sqrt{(2^2 + 1^1)(3^2 + (2x)^2)} \ge |2.3 + 1.2x| = |6 + 2x|$$

Suy ra $y \ge |6 + 2x| + |2x - 3|$. Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \ge |a + b|$ ta được:

$|6 + 2x| + |2x - 3| = |6 + 2x| + |3 - 2x| \ge |6 + 2x + 3 - 2x| = 9 \Rightarrow y \ge 9$

Vậy hàm số $y = \sqrt{45 + 20x^2} + |2x - 3|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 9.

Câu 108. Chọn **B.**

TXĐ: $D = [-2; 2]$. Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$y(-2) = -2$; $y(2) = 2$; $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\min\limits_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$

Câu 109. Chọn **C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1;\,2]$.

Ta có: $y'=\dfrac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$. Do $y(-1)=0, y(1)=\sqrt{2}, y(2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ nên

$\max\limits_{[-1;2]} y=y(1)=\sqrt{2}$, $\min\limits_{[-1;2]} y=y(-1)=0$

Câu 110. Chọn **C.**

Hàm số xác định với $\forall x\in\left[1;e^3\right]$

Hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ liên tục trên đoạn $\left[1;e^3\right]$. Ta có $y'=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin\left(1;e^3\right)\\ x=e^2\in\left(1;e^3\right)\end{array}\right.$. Khi đó $y(1)=0; y(e^2)=\dfrac{4}{e^2}; y(e^3)=\dfrac{9}{e^3}$

So sánh các giá trị trên, ta có $\max\limits_{[1;e^3]} y=y(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$

Câu 111. Chọn **A.**

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0;\,2]$

Ta có $y'=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad\notin(0;\,2)\\ x=-2\notin(0;\,2)\end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0)=3; y(2)=\dfrac{17}{3}$. Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y=y(2)=\dfrac{17}{3}$; $\min\limits_{x\in[0;2]} y=y(0)=3$

Câu 112. Chọn **A.**

Do $x+y=1$ nên $S=16x^2y^2+12(x+y)(x^2-xy+y^2)+34xy$

$=16x^2y^2+12[(x+y)^2-3xy]+34xy$, do $x+y=1$ $=16x^2y^2-2xy+12$

Đặt $t=xy$. Do $x\ge 0; y\ge 0$ nên $0\le xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow t\in[0;\dfrac{1}{4}]$

Xét hàm số $f(t)=16t^2-2t+12$ trên $[0;\dfrac{1}{4}]$. Ta có $f'(t)=32t-2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{16}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	12	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	$\frac{25}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có:

$\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{191}{16}$; $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{25}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{191}{16}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y)=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4};\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \\ (x;y)=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4};\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \end{array}\right.$

Câu 113. Chọn **A.**

Ta có $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32 \Leftrightarrow (x+y)^2-8(x+y)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x+y\le 8$

$A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)=(x+y)^3-3(x+y)-6xy+6$

$\Rightarrow K \ge (x+y)^3-\frac{3}{2}(x+y)^2-3(x+y)+6$

Đặt $t=x+y$. Do $0\le x+y\le 8$ nên $t\in[0;8]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2-3t+6$ trên $[0;8]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3t-3$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

$f(0)=6$; $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$; $f(8)=398$. Suy ra A $\ge\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Khi $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Câu 114. Chọn **D.**

$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2.$

Đặt $x=ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy=x^2+y^2-xy \Rightarrow (t+1)ty^3=(t^2-t+1)y^2$

Do đó $y=\frac{t^2-t+1}{t^2+t}$; $x=ty=\frac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2.$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} \Rightarrow f'(t)=\frac{-3t^2+3}{(t^2-t+1)^2}.$

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 115. Chọn **C.**

Với a, b là các số thực dương, ta có:

$$2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2) \Leftrightarrow 2(a^2+b^2)+ab=a^2b+ab^2+2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si ta được:

$$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$$

Suy ra: $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{5}{2}$.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, $t\geq\frac{5}{2}$. Ta được: $P=4(t^3-3t)-9(t^2-2)=4t^3-9t^2-12t+18$.

Xét hàm số: $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$ với $t\geq\frac{5}{2}$

$f'(t)=6(2t^2-3t-2)>0,\forall t\geq\frac{5}{2}$. Suy ra $\min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$.

Vậy $\min P=-\frac{23}{4}$ đạt được khi và chỉ khi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ và $a+b=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$\Leftrightarrow(a;b)=(2;1)$ hoặc $(a;b)=(1;2)$

Câu 116. Chọn **D.**

Do $1\leq x\leq 2;\ 1\leq y\leq 2$ nên $(x-1)(x-2)\leq 0$, nghĩa là $x^2+2\leq 3x$. Tương tự $y^2+2\leq 3y$

Suy ra $P\geq\frac{x+2y}{3x+3y+3}+\frac{y+2x}{3y+3x+3}+\frac{1}{4(x+y-1)}=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{\square 1}{4(x+y-1)}$

Đặt $t=x+y$ suy ra $2\leq t\leq 4$. Xét $f(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)}$, với $2\leq t\leq 4$

$f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{4(t-1)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$

Mà $f(2)=\frac{11}{12}$; $f(3)=\frac{7}{8}$; $f(3)=\frac{53}{60}$ nên $f(t)\geq f(3)=\frac{7}{8}$. Do đó $P\geq\frac{7}{8}$

Khi $x=1,y=2$ thì $P=\frac{7}{8}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{7}{8}$

Chủ đề 1.4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Đường tiệm cận ngang*

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

- **Nhận xét:** Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. *Đường tiệm cận đứng*

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. *Quy tắc tìm giới hạn vô cực*

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$		+	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

2. ***Chú ý:*** Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 2x)$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)=1>0$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1}$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=2>0$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0, x-1>0$ với mọi $x>1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3)=-1<0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0, x-1<0$ với mọi $x<1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3)=-1<0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

C. KỸ NĂNG SỬ DỤNG MÁYTÍNH

☺***Ý tưởng*** giả sử cần tính $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần A.

1. ***Giới hạn của hàm số tại một điểm***

   $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$.

   $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ thìnhập $f(x)$ và CALC $x=a-10^{-9}$.

   $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$ hoặc $x=a-10^{-9}$.

2. ***Giới hạn của hàm số tại vô cực***

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ thìnhập $f(x)$ và CALC $x=10^{10}$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ thìnhập $f(x)$ và CALC $x=-10^{10}$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 1+10^p9= máy hiện 4.

Nên $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=4$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 1+10^p9= máy hiện -999999998.

Nên $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 1p10^p9= máy hiện 999999998.

Nên $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10^10= máy hiện 2.

Nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{x-1}=2$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x}{x+1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+3x}{x+1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10^10 = máy hiện 3.

Nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{x-1}=2$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x+1}{x+1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x+1}{x+1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn p10^10= máy hiện 1.

Nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x+1}{x+1}=1$.

Ví dụ 7. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-1}{x+2}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn p10^10= máy hiện 2.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10^10= máy hiện 2.

Nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$.

Do đó đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ví dụ 7. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{x+1}{x-2}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 2+10^p9= máy hiện 3000000001.

Ấn r máy hỏi X? ấn 2p10^p9= máy hiện -2999999999.

Nên $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty$.

Do đó đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=-3$. **B.** $x=2$ và $y=1$.
C. $x=1$ và $y=2$. **D.** $x=-1$ và $y=2$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=-2$ và $y=-3$. **B.** $x=-2$ và $y=1$.
C. $x=-2$ và $y=3$. **D.** $x=2$ và $y=1$.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1,\ x=2$ và $y=0$. **B.** $x=1,\ x=2$ và $y=2$.
C. $x=1$ và $y=0$. **D.** $x=1, x=2$ và $y=-3$.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=3$ và $y=-3$. **B.** $x=3$ và $y=0$. **C.** $x=3$ và $y=1$. **D.** $y=3$ và $x=-3$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-8}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $y=2$ và $x=0$. **B.** $x=2$ và $y=0$. **C.** $x=2$ và $y=3$. **D.** $y=2$ và $x=3$.

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{3+2x}$ là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2}$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}+x$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ khẳng định nào sau đây là **sai**:

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$. **D.** Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(3;1)$.

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận ?

A. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4-x^2}$. **C.** $y=\dfrac{x+3}{5x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x^2-x+9}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y=-3$.

C. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, có tiệm cận ngang.

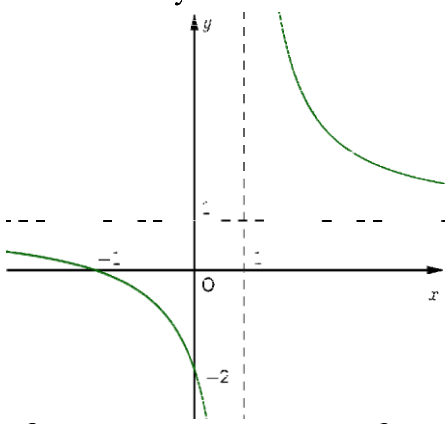
Câu 13. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng:

A. $y=\dfrac{3x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\dfrac{-1}{x}$. **C.** $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

Câu 14. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang:

A. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$. **C.** $y=\dfrac{3}{x^2-1}$. **D.** $y=\dfrac{3}{x-2}+1$.

Câu 15. Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào sau đây :



A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{3-x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{3x+2}$ có đường tiêm cận ngang là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $y=3$. **D.** $y=1$.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ có đồ thị (C). Kết luận nào sau đây đúng ?

A. Khi $m=3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.

B. Khi $m=-3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.

C. Khi $m\neq\pm3$ thì (C) có tiệm cận đứng $x=-m$, tiệm cận ngang $y=m$.

D. Khi $m=0$ thì (C) không có tiệm cận ngang.

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

A. $y=\pm1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Câu 21. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C): $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$?

A. $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=2$.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+n}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết tiệm cận ngang của (C) đi qua điểm $A(-1;2)$ đồng thời điểm $I(2;1)$ thuộc (C). Khi đó giá trị của $m+n$ là

A. $m+n=-1$. **B.** $m+n=1$. **C.** $m+n=-3$. **D.** $m+n=3$.

Câu 23. Số tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 24. Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-m}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $m=0$; $m=\pm1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\pm1$. **D.** $m=1$.

Câu 25. Số tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}$ có hai đường tiệm cận ngang với

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=0$; $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 27. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+mx}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng khi

A. $m\neq 0$. **B.** $\forall m\in R$. **C.** $m\neq -1$. **D.** $m\neq 1$.

Câu 28. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{neu } x\geq 1\\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{neu } x<1\end{cases}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 30. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 31. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\square 3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m<-\dfrac{13}{12}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m>-\dfrac{13}{12}$.

Câu 32. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m<\dfrac{3}{2}; m\neq 1; m\neq -3$. **B.** $m>-\dfrac{3}{2}; m\neq 1$.

C. $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m<\dfrac{3}{2}$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m=1$.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{2x+1}}{x^3-2x^2-x+2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng 1 tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m<0$.
B. $m>0$.
C. $m=0$.
D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m\le 1$. **D.** Không có m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng.

A. Không có m thỏa mãn yêu đều đề bài.. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ne -2 \\ m\ne 1 \end{array}\right.$.

C. $m\in\mathbb{R}$. **D.** $\begin{cases} m\ne -2 \\ m\ne 1 \end{cases}$

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C). Tính diện tích của tam giác IAB.

A. 2. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 41. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 42. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 3.

Câu 43. Đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{x^2-4x+2}$ có tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=\sqrt{2}$. **D.** $x=-2$.

Câu 44. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành

A. $M(0;-1),M(3;2)$. **B.** $M(2;1),M(4;3)$. **C.** $M(0;-1),M(4;3)$. **D.** $M(2;1),M(3;2)$.

Câu 45. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 46. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)^2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 47. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}\,(C)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{3x+9}$ có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Giá trị của số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $m \ge a+b$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}\,(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}\,(C)$. Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của 2 tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). Giá trị lớn nhất của d là

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}\,(C)$. Gọi d là tiếp tuyến bất kì của (C), d cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại A, **B.** Khi đó khoảng cách giữa A và B ngắn nhất bằng

A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

E. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	B	A	A	A	C	A	C	A	D	A	D	B	B	C	C	D	B	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52								
A	A	A	C	A	C	D	C	D	D	A	A								

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ấn CALC $x=1-10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2 nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Câu 2. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-3x}{x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1-3x}{x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x}{x+2}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\dfrac{1-3x}{x+2}$.

Ấn CALC $x=-2+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 6999999997 nên $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-3x}{x+2}=+\infty$.

Ấn CALC $x=-2-10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -7000000003 nên $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1-3x}{x+2}=-\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng -2,999999999 nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x}{x+2}=-3$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Câu 3. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$. Tính tương tự với $x=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Phương pháp tự luận

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Xét tại $x=1$: Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty$.

Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -1,000000002 nên $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$.

Tương tự xét với $x=2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=2$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2.10^{-10} nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=0$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Câu 4. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Phương pháp trắc nghiệm

Tương tự câu 3,4 nên tự tính kiểm tra

Câu 5. **Chọn B.**

Tương tự câu 3.

Câu 6. **Chọn D.**

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x=-\frac{3}{2}$ và tiệm cận ngang là $y=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2.

Câu 7. **Chọn D.**

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x=-\frac{2}{3}$ và tiệm cận ngang là $y=0$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 8. **Chọn D.**

Tìm được tiệm cận đứng là $x=\pm 2$ và tiệm cận ngang là $y=0 \Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 3

Câu 9. **Chọn C.**

Quy đồng biến đổi hàm số đã cho trở thành $y=\frac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}$

Tìm được tiệm cận đứng là $x=-1$, $x=4$ và không có tiệm cận ngang (Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$)

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 10. **Chọn B.**

Tìm được tiệm cận đứng là $x=3$ và tiệm cận ngang là $y=1$

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(3;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị

$\Rightarrow$ A, C, D đúng

Câu 11. **Chọn B.**

Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{4-x^2}$ có 3 đường tiệm cận.(TCĐ là $x=\pm 2$ và TCN $y=0$)

Câu 12. **Chọn C.**

Đồ thị hàm số $y=\frac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$ có hai đường tiệm cận đứng $x=\pm 1$ và một tiệm cận ngang $y=-1$

Câu 13. **Chọn A.**

Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm nên không tìm được số x_0 để $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{3x-1}{x^2+1}=\pm\infty$

hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{3x-1}{x^2+1}=\pm\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCĐ là $x=0$, $x=-2$, $x=1$

Câu 14. **Chọn B.**

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}=\pm\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCN là $y=2$, $y=0$, $y=1$

Câu 15. **Chọn C.**

Từ đồ thị ta thấy có tiệm cận đứng là $x=1$ và $y=1$ $\Rightarrow$ loại A,B

Xét tiếp thấy giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-2)$ $\Rightarrow$ **Chọn C.**.

Câu 16. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=1.$

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{3X-1}{3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 1.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Câu 17. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{2X-1}{X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 2.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 2.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Tiếp tục ấn CALC $-2+10^{-12}$ ta được kết quả là -5.10^{12}, ấn CALC $-2-10^{-12}$ ta được kết quả là 5.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$.

Do đó ta được $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 18. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

Lại có $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=1;\ x=2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{2X-1}{X^2+3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 0.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 0.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Tiếp tục ấn CALC $1+10^{-12}$ ta được kết quả là -1.10^{12}, ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là 1.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ do đó ta được $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tiếp tục ấn CALC $2+10^{-12}$ ta được kết quả là 3.10^{12}, ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là -3.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty;\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ do đó ta được $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 19. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Xét phương trình: $mx+9=0$.

Với $x=-m$ ta có: $-m^2+9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3$

Kiểm tra thấy với $m=\pm 3$ thì hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Khi $m\neq\pm 3$ hàm số luôn có tiệm cận đứng $x=m$ hoặc $x=-m$ và tiệm cận ngang $y=m$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{XY+9}{X+Y}$ ấn CALC $X=-3+10^{-10};Y=-3$

ta được kết quả -3.

Tiếp tục ấn CALC $X=-3-10^{-10};Y=-3$ ta được kết quả -3.

Vậy khi $m=-3$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Tương tự với $m=3$ ta cũng có kết quả tương tự.

Vậy các đáp án A và B không thỏa mãn.

Tiếp tục ấn CALC $X=-10^{10};Y=0$ ta được kết quả $9x10^{-10}$, ấn CALC $X=10^{10};Y=0$ ta được kết quả $9x10^{-10}$.

Do đó hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 20. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Vì TXĐ của hàm số là $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\pm 1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ ấn CALC 10^{10} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục ấn CALC -10^{10} ta được kết quả là -1.

Vậy có hai tiệm cận ngang là $y=\pm 1$.

Câu 21. **Chọn D.**

Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì $m^2+2\neq 0$ luôn đúng với mọi m .

Khi đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{m}{2}$.

Vậy để tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$ thì $-\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$

Câu 22. **Chọn A.**

Để hàm số có đường tiệm cận ngang thì $m+n\neq 0$

Khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=m$ do đó ta có $m=2$

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $I(2;1)$ nên có $2m+n=1\Rightarrow n=-3$

Vậy $m+n=-1$

Câu 23. **Chọn B.**

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ \sqrt{x^2-9}\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)\setminus\{\pm 5\}$

Khi đó có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=2$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác có $\lim\limits_{x\to-5^{\pm}}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=\mp\infty;\ \lim\limits_{x\to 5^{\pm}}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

Câu 24. **Chọn A.**

Xét $m=0$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Xét $m\neq 0$ khi đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng nếu $ad-bc=0\Leftrightarrow -1+m^2=0$ $\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $m=0;\ m=\pm 1$

Câu 25. **Chọn A.**

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}=\infty$. Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứnglà $x=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}y=2;\ \lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 26. **Chọn A.**

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}=-1-m$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}=1-m$

Để hàm số có hai tiệm cận ngang thì $-1-m\neq 1-m$ (thỏa với mọi m).

Vậy $\forall m\in R$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Câu 27. **Chọn C.**

Xét phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+mx=0$.

Nếu phương trình không có nghiệm $x=1$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Nếu phương trình có nghiệm $x=1$ hay $m=-1$.

Khi đó xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$ nên trong trường hợp này đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Vậy $m\neq -1$.

Câu 28. **Chọn A.**

Điều kiện: $\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ x^2-3x-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ x\neq -1\\ x\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ x\neq -1\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}=+\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to(-1)^+$ và $x\to(-1)^-$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 29. **Chọn C.**

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{x-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{x}}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

Câu 30. **Chọn A.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2-(2m+3)x+2(m-1)=0$ có nghiệm $x=2$

$\Leftrightarrow f(2)=0\Leftrightarrow 4-2(2m+3)+2(m-1)=0\Leftrightarrow -2m-4=0\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 31. **Chọn D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\square 3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $4x^2+2(2m+3)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow(2m+3)^2-4(m^2-1)>0\Leftrightarrow 12m>-13\Leftrightarrow m>-\dfrac{13}{12}$.

Câu 32. **Chọn A.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2-2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+3>0 \\ m^2+2m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

Câu 33. Chọn D.

- Nếu $m = 0$ thì $y = x + 1$. Suy ra, đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m < 0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow mx^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{-m}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $0 < m < 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 - \sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}\right) = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m = 1$ thì $y = x + \sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

- Với $m > 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 - \sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}\right) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 34. Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

Với điều kiện trên ta có, $y = \dfrac{(x^2 - x + 3) - (2x+1)}{(x^2 - 3x + 2)(x+1)\left(\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{2x+1}\right)}$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 3x + 2)(x+1)\left(\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{2x+1}\right)} = \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{2x+1}\right)}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)} = 0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y$ không tồn tại.

Câu 35. **Chọn B.**

Điều kiện: $mx^2+1>0$.

- Nếu $m=0$ thì hàm số trở thành $y=x+1$ không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m<0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{-m}} < x < \dfrac{-1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m>0$ thì hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Suy ra đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Suy ra đường thẳng $y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36. **Chọn C.**

Điều kiện: $\begin{cases} x\le 1 \\ x\ne m \end{cases}$.

Nếu $m>1$ thì $\lim\limits_{x\to m^+} y$; $\lim\limits_{x\to m^-} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m=1$ thì hàm số trở thành $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^-} y = \lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to1^-$.

$\lim\limits_{x\to1^+} y$ không tồn tại.

Do đó, $m=1$ thỏa mãn.

- Nếu $m<1$ thì $\lim\limits_{x\to m^+} y = \lim\limits_{x\to m^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to m^-} y = \lim\limits_{x\to m^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to m^+$ và $x\to m^-$.

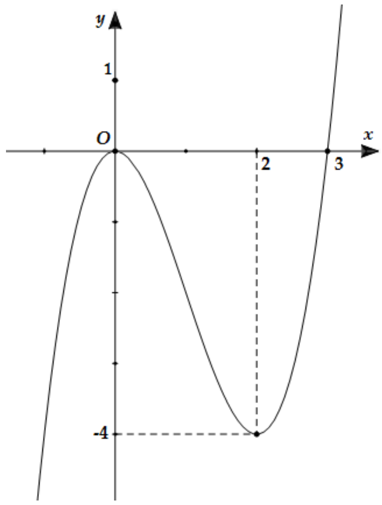
Vậy $m\le 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 37. **Chọn C.**

TH1 : Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có một nghiệm đơn $x=-1$ và một nghiệm kép.

Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có nghiệm $x=-1$ nên $(-1)^3-3(-1)^2-m=0 \Leftrightarrow m=-4$.

Với $m=-4$ phương trình trở thành $x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn vì $x=2$ là nghiệm kép).



TH2: Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có đúng một nghiệm khác -1 $\Leftrightarrow x^3-3x^2=m$ có một nghiệm khác -1

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ (-1)^3-3.(-1)^2 \neq m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ m \neq -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right.$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 38. **Chọn D.**

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ 2 không là nghiệm của $f(x)=x^2-mx-2m^2$

$\Leftrightarrow f(2)=4-2m-2m^2 \neq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq -2 \end{array}\right.$.

Câu 39. **Chọn B.**

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow -1<m<1$.

Câu 40. **Chọn C.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}, \forall x\neq 1$.

(C) có tiệm cận đứng $x=1$ (d_1) và tiệm cận ngang $y=2$ (d_2) nên $I(1;2)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)\in(C), x_0\neq 1$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$

Δ cắt d_1 tại $A\left(1;\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\right)$ và cắt d_2 tại $B(2x_0-1;2)$.

Ta có $IA = \left|\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}-2\right| = \dfrac{4}{|x_0-1|}$; $IB = |(2x_0-1)-1| = 2|x_0-1|$.

Do đó, $S = \dfrac{1}{2}IA.IB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{|x_0-1|}.2|x_0-1| = 4$.

Câu 41. **Chọn A.**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -1$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 42. **Chọn A.**

Tập xác định $D = [-1;1]$

Nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$.

Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Câu 43. **Chọn A.**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-2}{x+\sqrt{x^2-4x+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-\dfrac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right) = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right) = 2 > 0$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 44. **Chọn C.**

Do M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ nên $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ với $x_0 \neq 1$

Phương trình tiệm cận đứng là $x-1=0$ (d).

Giải phương trình $d(M,d) = d(M,Ox) \Leftrightarrow |x_0-1| = \left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=4 \end{array}\right.$.

Câu 45. **Chọn A.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y=x-1$.

Do đó đồ thị không có tiệm cận

Câu 46. **Chọn C.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1;\ \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-1}{x+2}=+\infty$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận

Câu 47. **Chọn D.**

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=-1$

Do tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1};\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 48. **Chọn C.**

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-3}\right)$

Phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là $x-3=0\ (d_1)$, $y-1=0\ (d_2)$.

Giải phương trình $5d(M,d_1)=d(M,d_2)$ tìm x_0

Câu 49. **Chọn D.**

Ta có đường tiệm cận đứng là $x=-3$ và đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$

Nên $a=-3,\ b=\dfrac{1}{3}$

Do đó $m\geq a+b\Leftrightarrow m\geq-\dfrac{8}{3}\Rightarrow m=-2$

Câu 50. **Chọn D.**

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $_0$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ (d_1)$, $y-2=0\ (d_2)$.

Ta có $d=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-2|+\dfrac{1}{|x_0-2|}\geq2$

Câu 51. **Chọn A.**

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\dfrac{x-x_0}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\left(\Delta\right)$.

Tính $d\left(M,\Delta\right)\leq 2$.

Câu 52. **Chọn A.**

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $_0$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\dfrac{x-x_0}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\left(d\right)$.

Tìm tọa độ giao của tiệm cận và tiếp tuyến $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B\left(2x_0-2;2\right)$

Từ đó đánh giá $AB\geq 4$

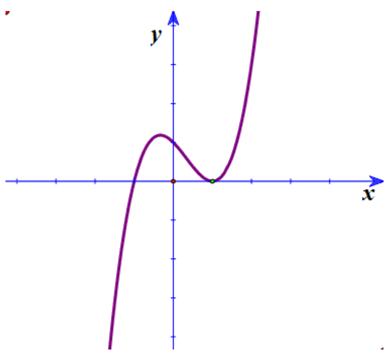
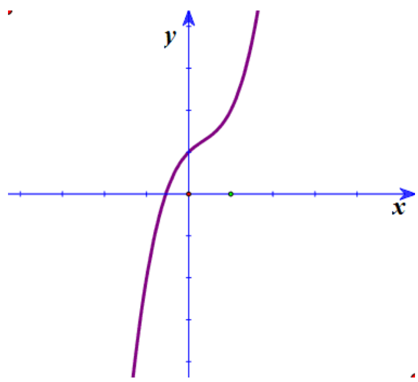
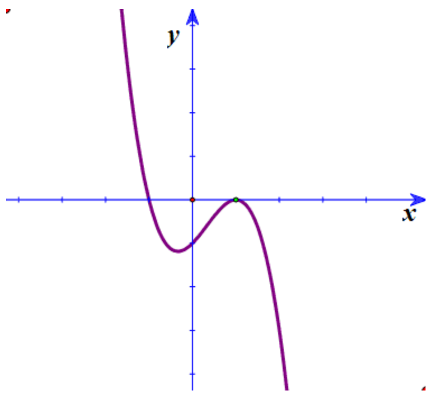
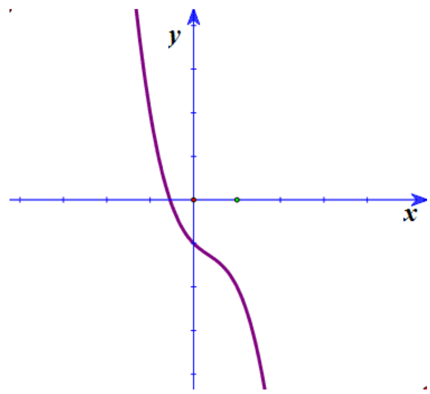
Chủ đề 1.5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

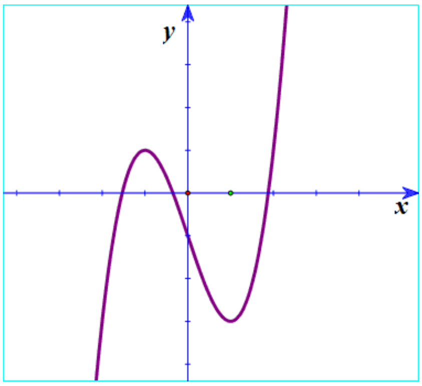
1. *Sơ đồ bài toán khảo sát và vẽ đồ thị hàm số*

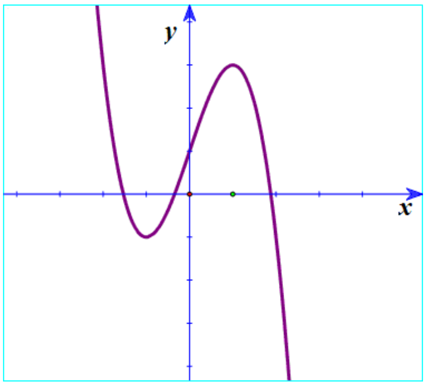
- ***Bước 1.*** Tìm tập xác định của hàm số;
- ***Bước 2.*** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;
- ***Bước 3.*** Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;
- ***Bước 4.*** Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} y$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (*nếu có*);
- ***Bước 5.*** Lập bảng biến thiên;
- ***Bước 6.*** Kết luận tính biến thiên và cực trị (*nếu có*);
- ***Bước 7.*** Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (*giao với trục Ox, Oy, các điểm đối xứng, …*);
- ***Bước 8.*** Vẽ đồ thị.

2. *Các dạng đồ thị của hàm số bậc 3* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

Đồ thị có 2 điểm cực trị	Đồ thị không có điểm cực trị
 $a > 0$	 $a > 0$
 $a < 0$	 $a < 0$

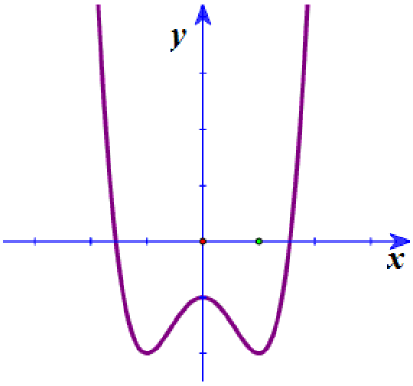
✍ ***Lưu ý***: Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm 2 phía so với trục Oy khi $ac < 0$



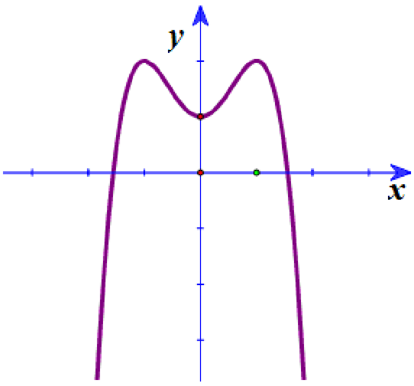


3. *Các dạng đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$*

Đồ thị có 3 điểm cực trị

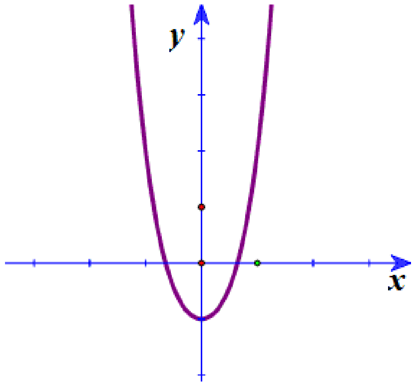


$a > 0$

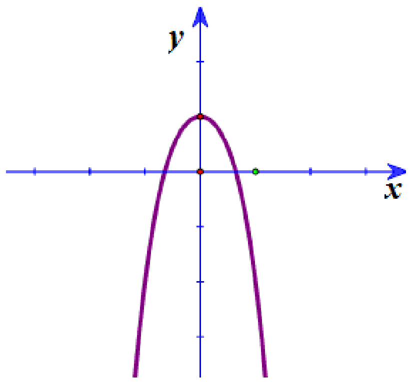


$a < 0$

Đồ thị có 1 điểm cực trị



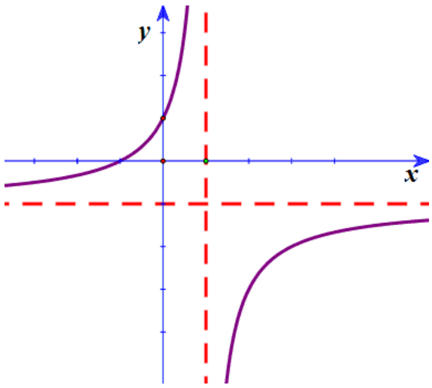
$a > 0$



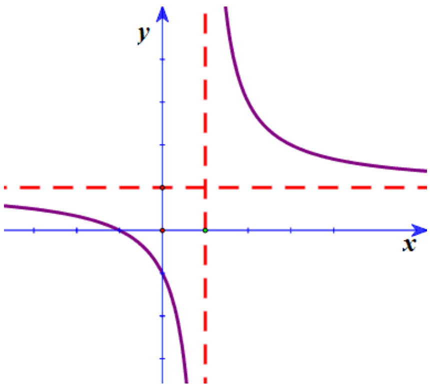
$a < 0$

4. ***Các dạng đồ thị của hàm số nhất biến*** $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}, \left(ab - bc \neq 0\right)$

Khi $ad - bc > 0$



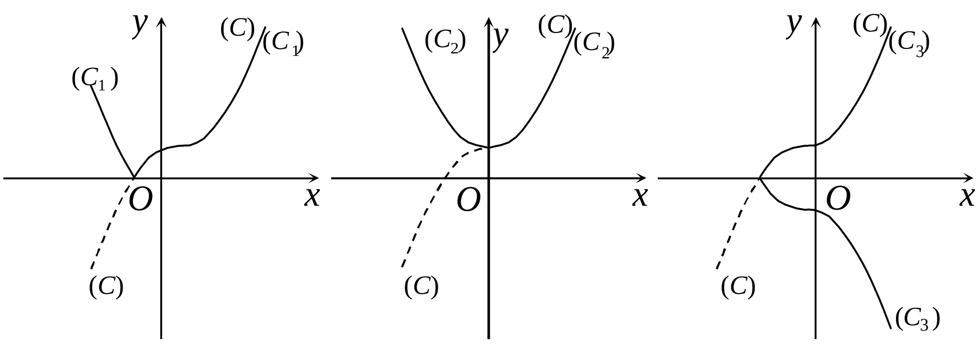
Khi $ad - bc < 0$



5. ***Biến đổi đồ thị***

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Khi đó, với số $a > 0$ ta có:

- Hàm số $y = f(x) + a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.
- Hàm số $y = f(x) - a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
- Hàm số $y = f(x + a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
- Hàm số $y = f(x - a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
- Hàm số $y = -f(x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Ox.
- Hàm số $y = f(-x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Oy.
- Hàm số $y = f\left(|x|\right) = \begin{cases} f(x) & khi \quad x > 0 \\ f(-x) & khi \quad x \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:
  - ✓ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần (C) nằm bên trái Oy.
  - ✓ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy qua Oy.



$(C_1): y_1 = |f(x)|$ **$(C_2): y_2 = f\left(|x|\right)$** **$(C_3): |y_3| = f(x)$**

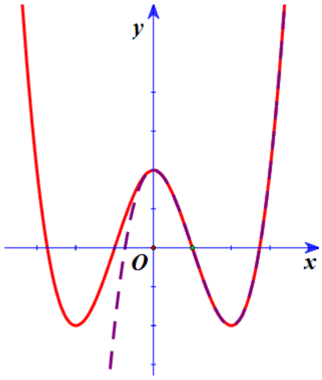
- Hàm số $y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & khi \quad f(x) > 0 \\ -f(x) & khi \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:
  - ✓ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.
  - ✓ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. **Ví dụ 1.** Vẽ đồ thị hàm số (C'): $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ từ đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C):

   Giả sử (C) là đường đứt khúc trong hình vẽ.

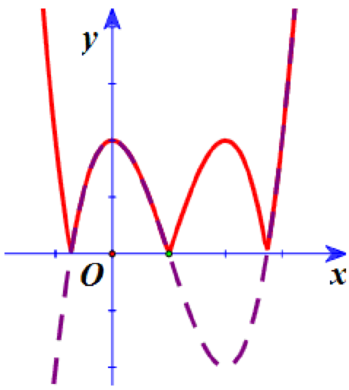
   - ***Bước 1:*** Giữ nguyên đường đứt khúc phía bên phải trục *Oy* bằng cách tô đậm phần đường đứt khúc bên phải *Oy*, và bỏ phần đường đứt khúc bên trái *Oy*.
   - ***Bước 2***: lấy đối xứng qua *Oy* phần đường mới tô đậm, ta được đồ thị (C').



2. **Ví dụ 2.** Vẽ đồ thị hàm số $(C'): y = |x^3 - 3x^2 + 2|$ từ đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$.

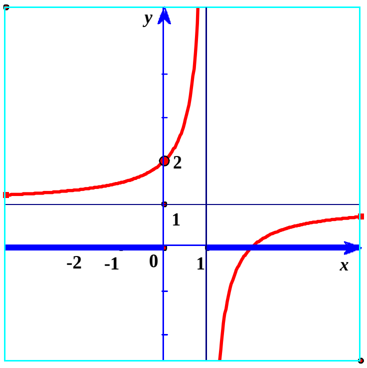
   Giả sử (C) là đường đứt khúc trong hình vẽ.

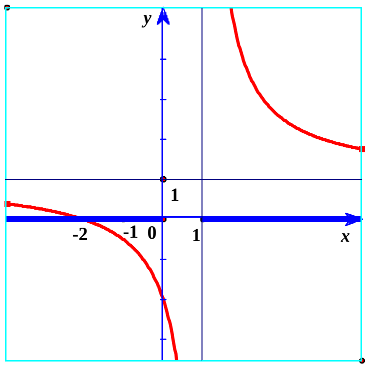
   - ***Bước 1:*** Giữ nguyên đường đứt khúc phía trên trục *Ox* bằng cách tô đậm phần đường đứt khúc phía trên *Ox*.
   - ***Bước 2:*** lấy đối xứng qua Ox phần đường đứt khúc nằm dưới *Ox* qua *Ox* rồi xóa phần đường đứt khúc nằm dưới *Ox*, ta được đồ thị (C').

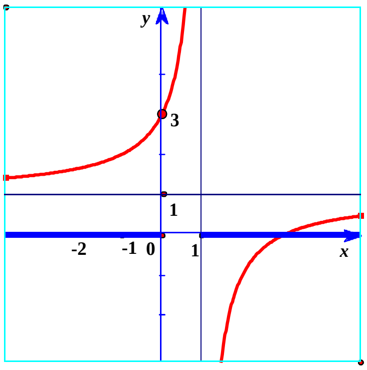


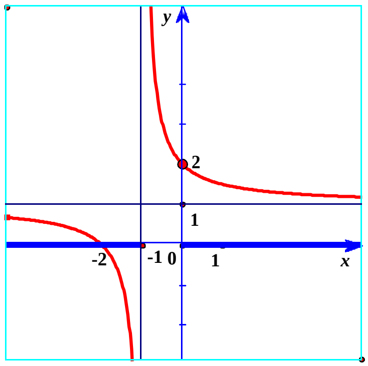
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

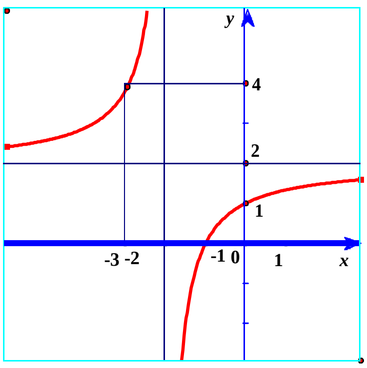
A.


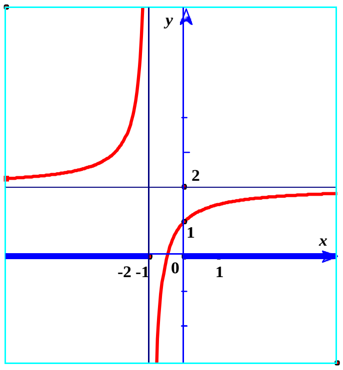
B.


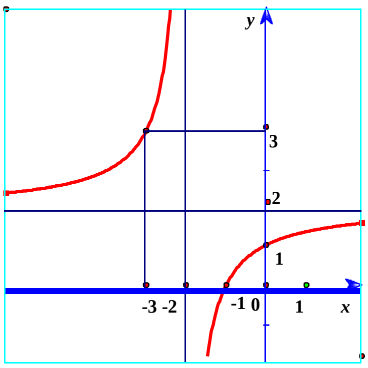
C.


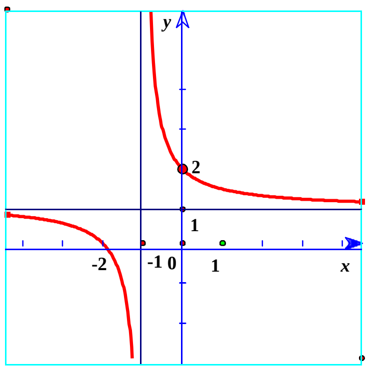
D.


Câu 2. Hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

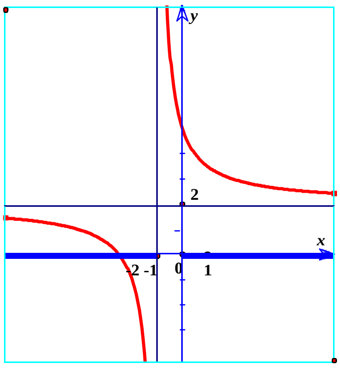
A.


B.


C.


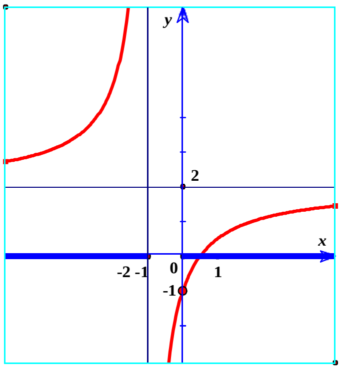
D.


Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y = x^4 - x^2 + 1$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{1-2x}{x-1}$.

Câu 5. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ -1

A. $y = \dfrac{x+3}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{-x-3}{x-1}$.

Câu 6. Hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$ có bảng biến thiên nào dưới đây. Chọn đáp án đúng?

A.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	3 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 3

B.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

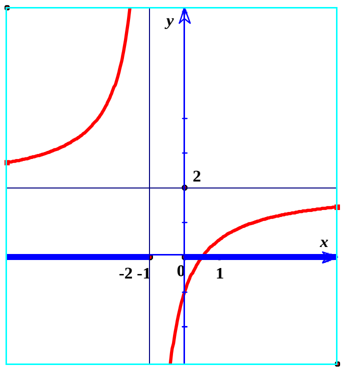
C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là **sai?**



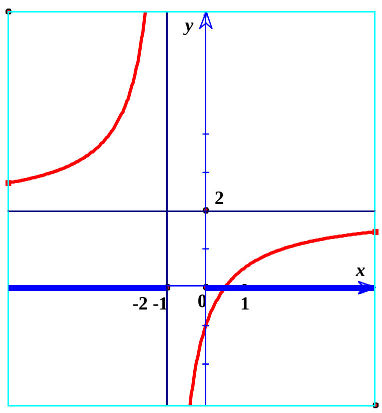
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

D. Hàm số có hai cực trị.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



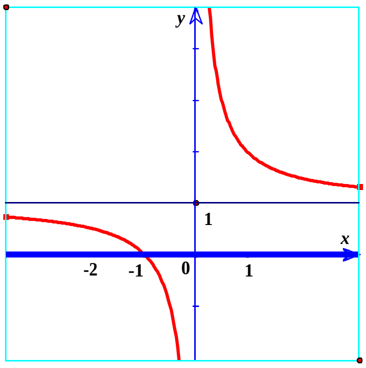
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

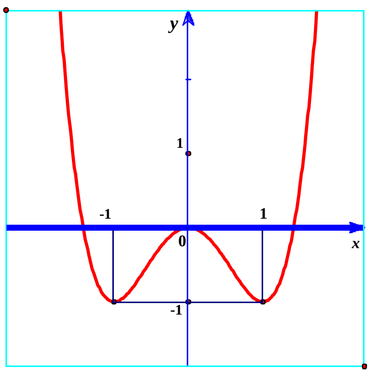
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

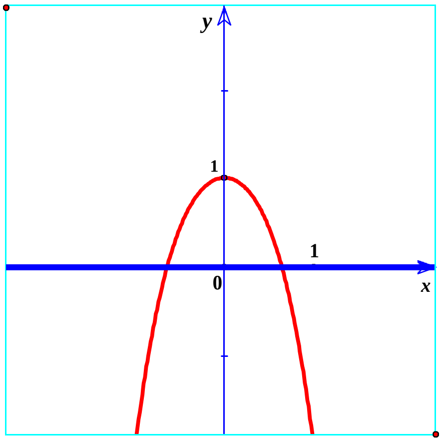
D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Câu 11. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



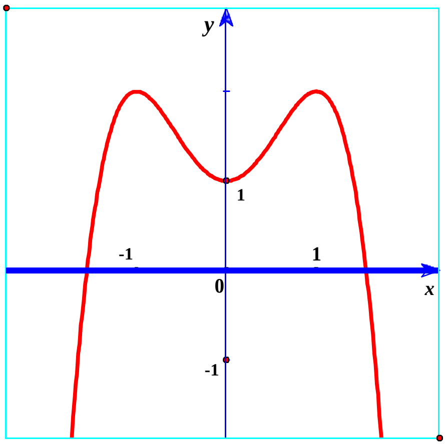
A. $y=x^4-3x^2+1$. **B.** $y=x^4+2x^2$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=-x^4-2x^2$.

Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$. **C.** $y=x^4-3x^2+1$. **D.** $y=-x^4-2x^2+1$.

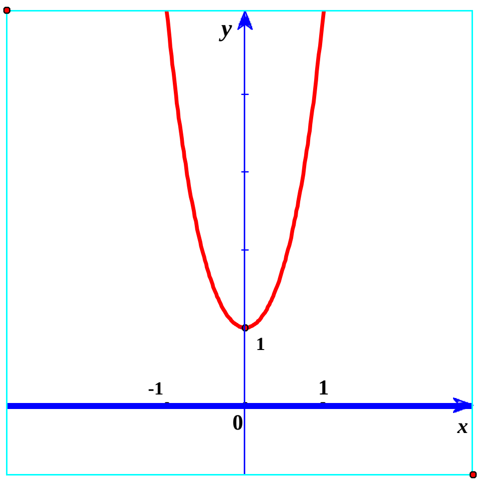
Câu 13. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=x^4-3x^2+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$.

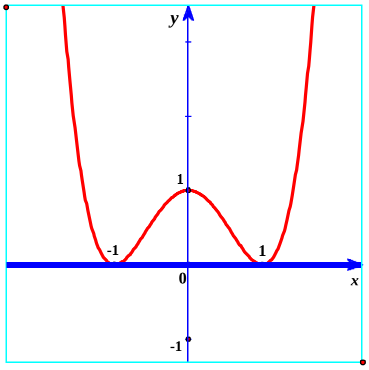
C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^4-2x^2+1$.

Câu 14. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=x^4+3x^2+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$. **C.** $y=x^4-3x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

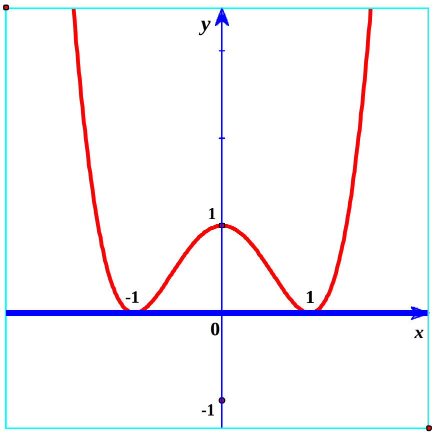
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng về hàm số $f(x)$



A. Hàm số $f(x)$ có điểm cực đại là $(0;1)$. **B.** Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu là $(0;\,1)$.

C. Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị. **D.** Hàm số $f(x)$ có ba giá trị cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai về hàm số $f(x)$:



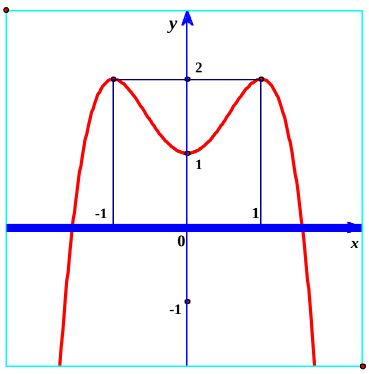
A. Hàm số $f(x)$ tiếp xúc với Ox.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1;\,0)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;\,-1)$.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai về hàm số $f(x)$:



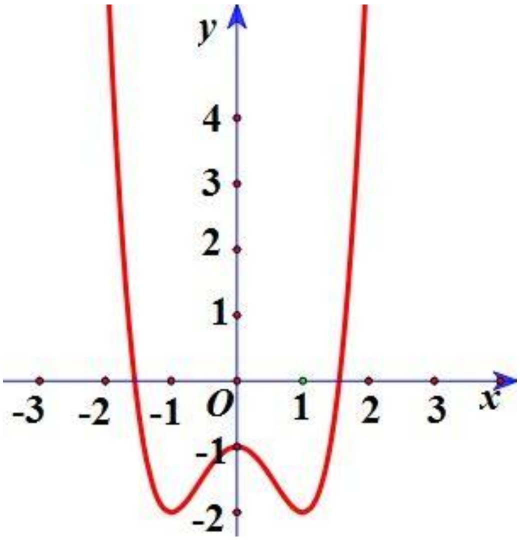
A. Hàm số $f(x)$ có ba cực trị.

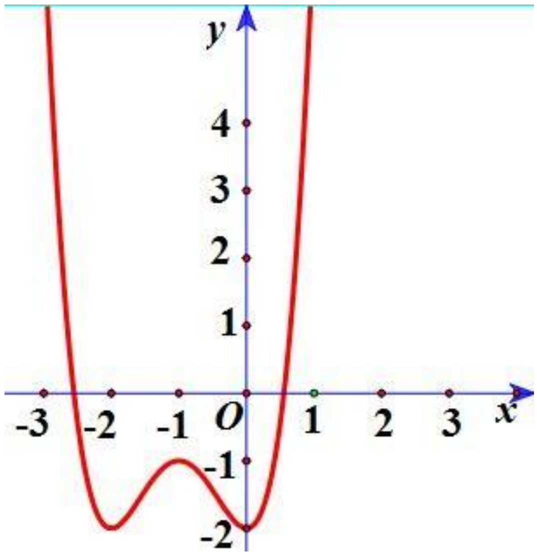
B. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất là 2 khi $x = 1$.

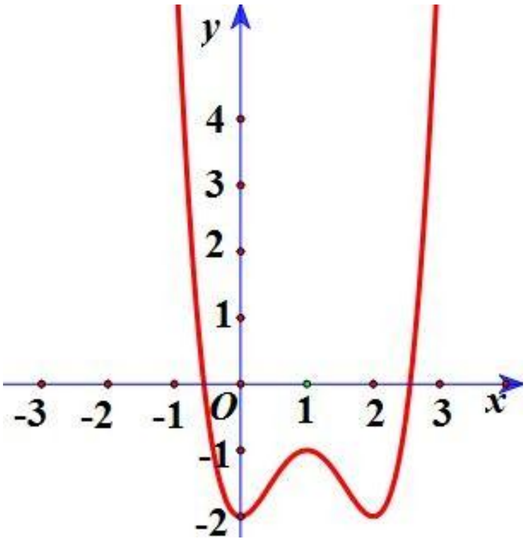
C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1 khi $x = 0$.

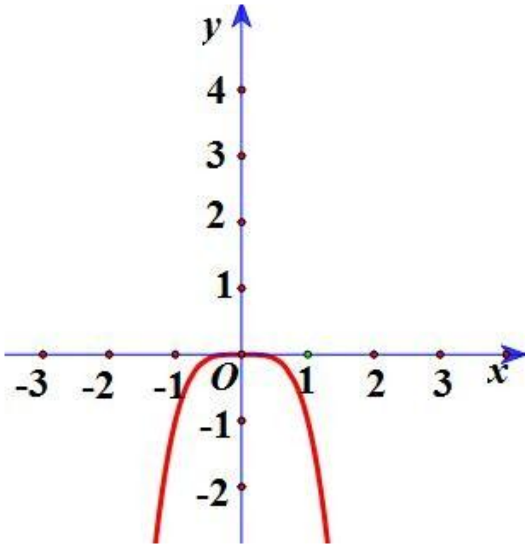
D. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Câu 18. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau đây?

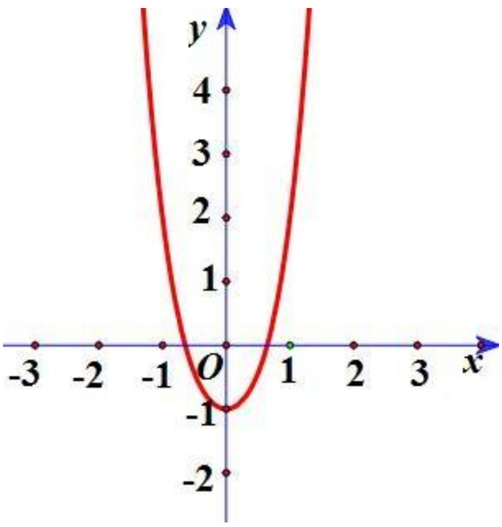
A.


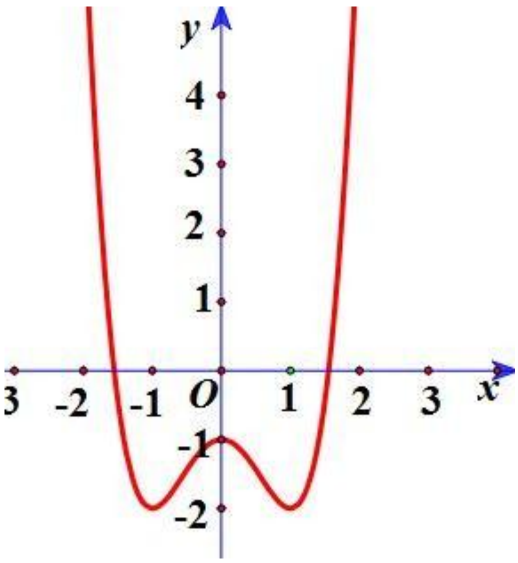
B.


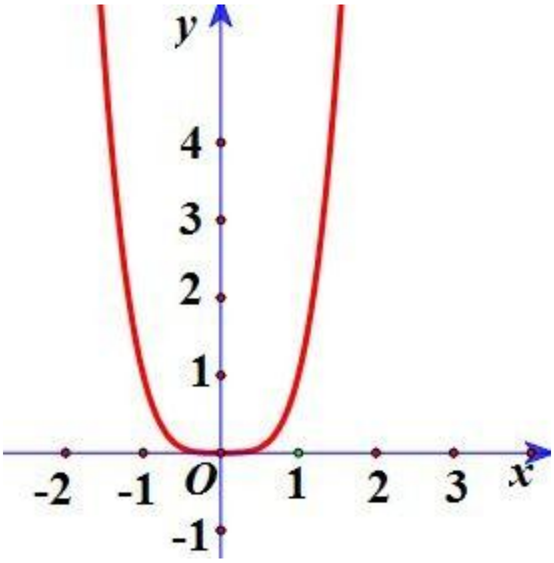
C.


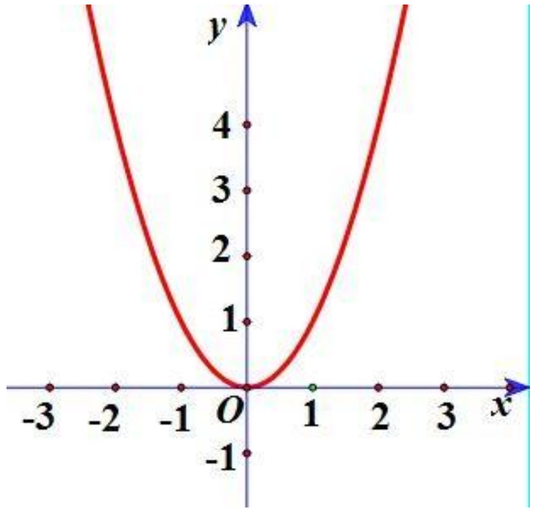
D.


Câu 19. Cho hàm số $(C): y = x^4 + 2x^2 - 1$. Đồ thị hàm số (C) là đồ thị nào trong các đồ thị sau?

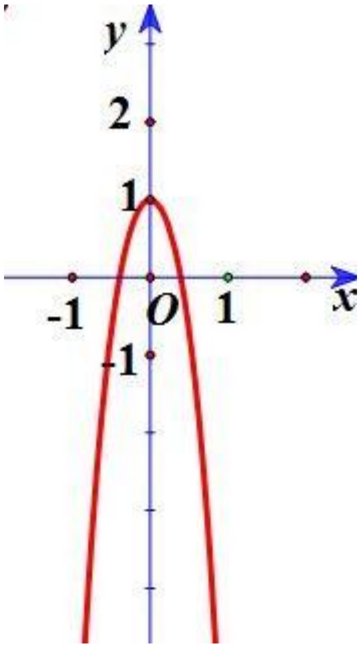
A.


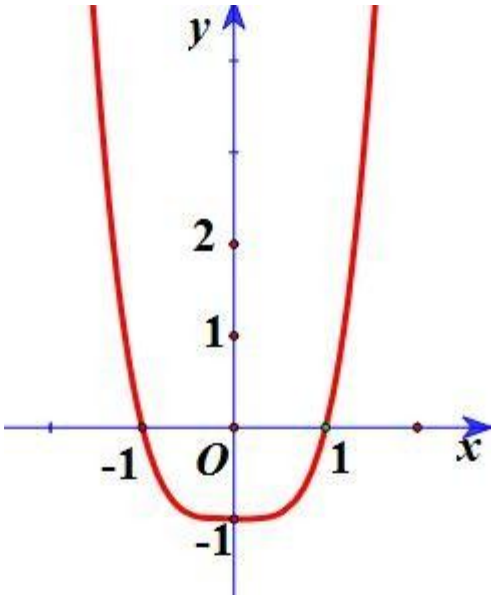
B.


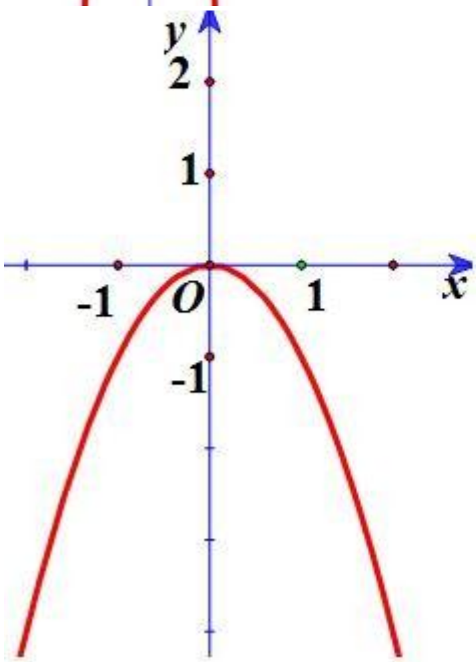
C. 

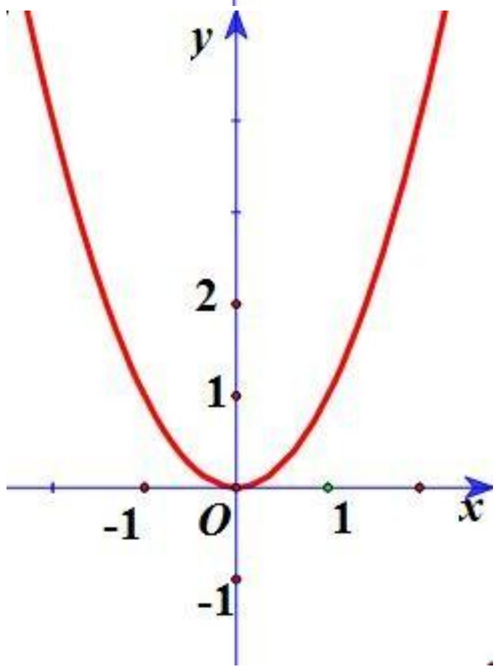
D. 

Câu 20. Đồ thị của hàm số $y=-3x^4-6x^2+1$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau đây?

A. 

B. 

C. 

D. 

Câu 21. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

A. $y=-x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$.

C. $y=x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Câu 22. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

A. $y=-x^3-3x^2-3x$. **B.** $y=-x^3+3x^2-3x$.

C. $y=x^3+3x^2-3x$ **D.** $y=x^3-3x^2+3x$

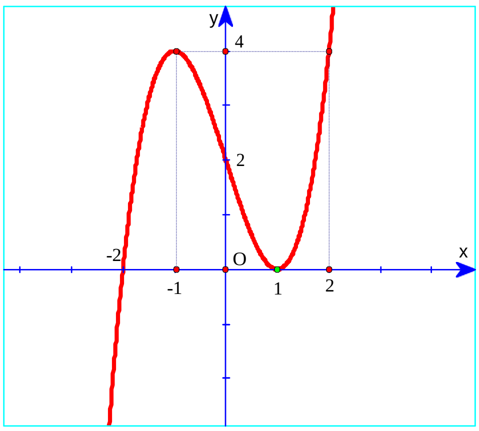
Câu 23. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

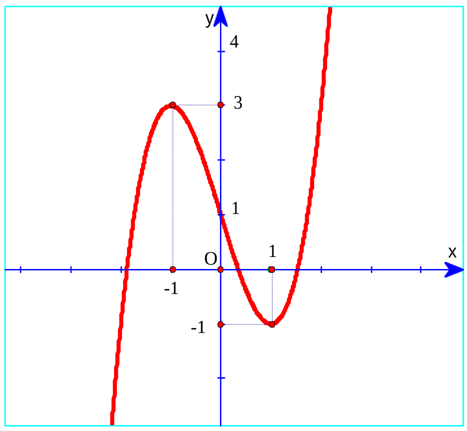
A. $y=x^3+3x^2-1$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$.

C. $y=-x^3+3x^2-1$. **D.** $y=-x^3-3x^2-1$.

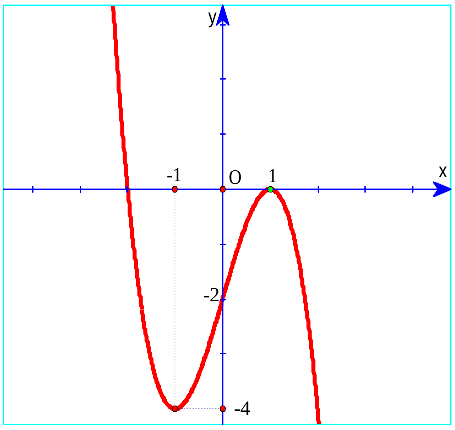
Câu 24. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?



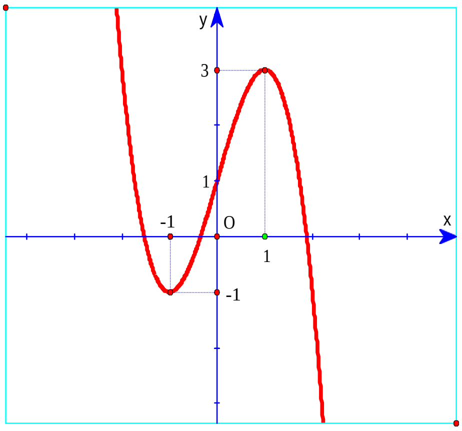
A. Hình 1.



B. Hình 2.

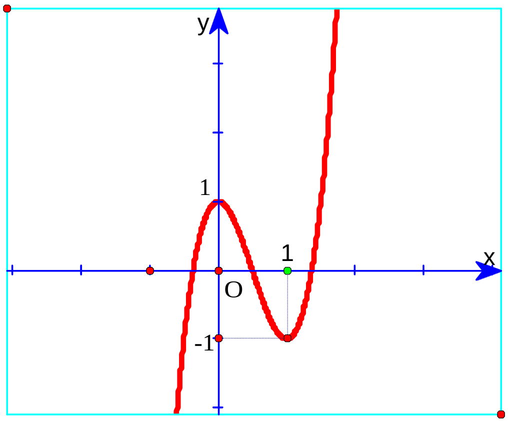


C. Hình 3.

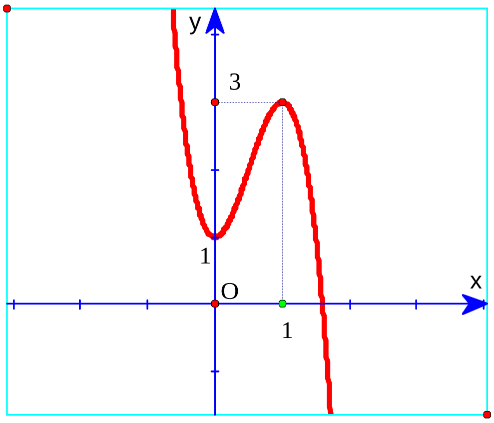


D. Hình 4.

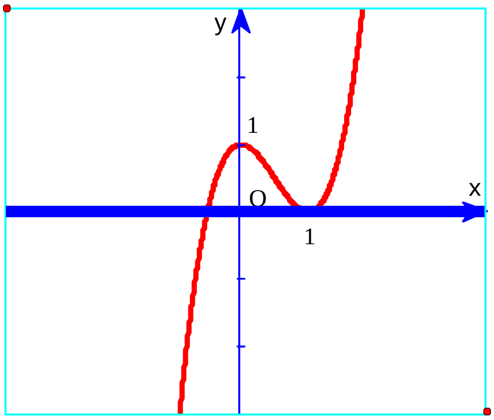
Câu 25. Đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có dạng:



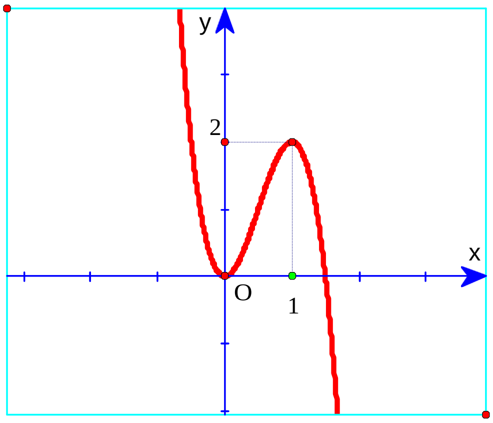
A. Hình 1.



B. Hình 2.

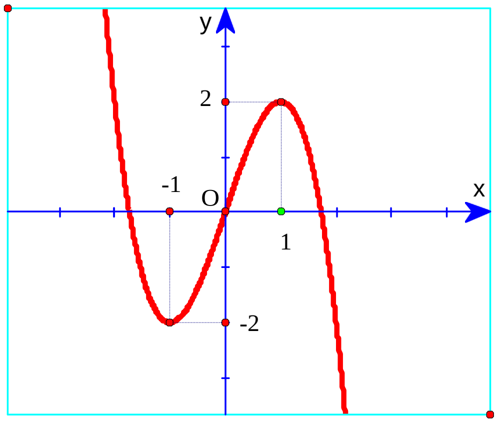


C. Hình 3.



D. Hình 4.

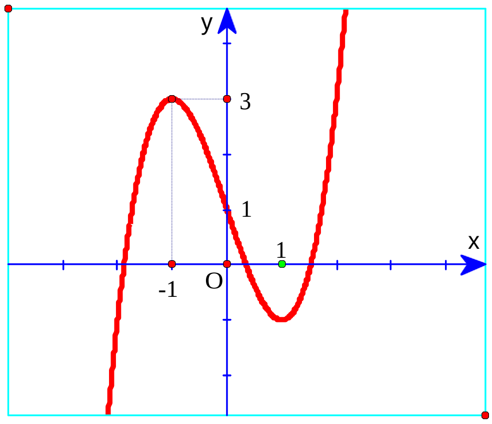
Câu 26. Đường cong trong hình bên d ư ớ i là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 1$.

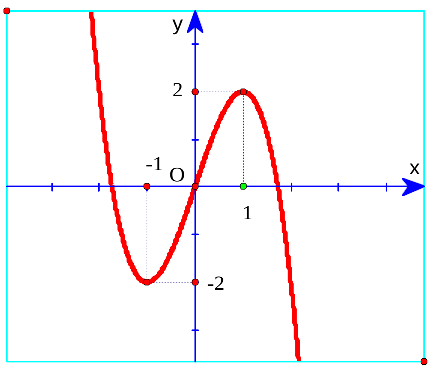
Câu 27. Đường cong trong hình bên d ư ớ i là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = -x^2 + x - 1$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 1$.

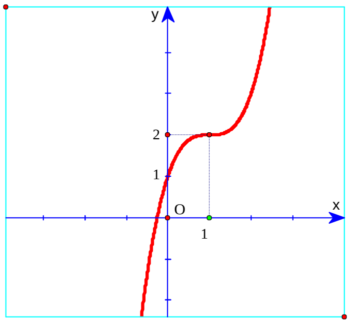
Câu 28. Đường cong trong hình bên d ư ớ i là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x - 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x$.

Câu 29. Đường cong trong hình bên d ư ớ i là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



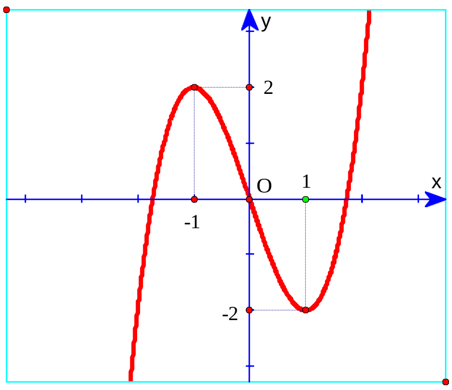
A. $y = x^3 - 3x + 1.$ **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$ **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 1.$

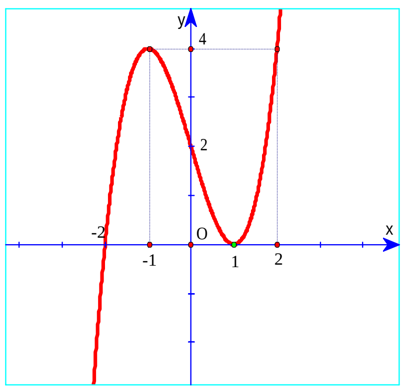
Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Đồ thị nào thể hiện hàm số $y = f(x)$?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

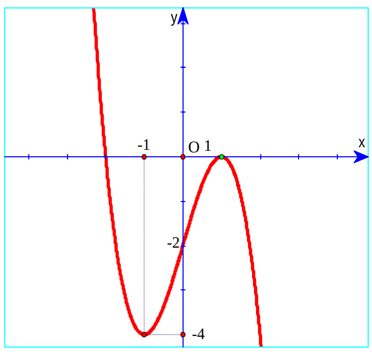
A.



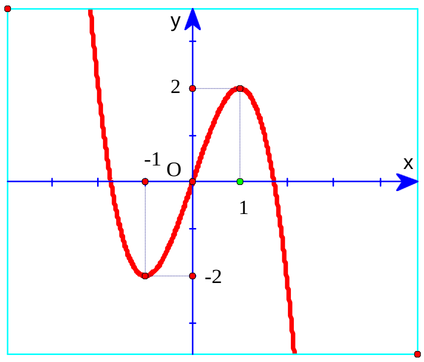
B.



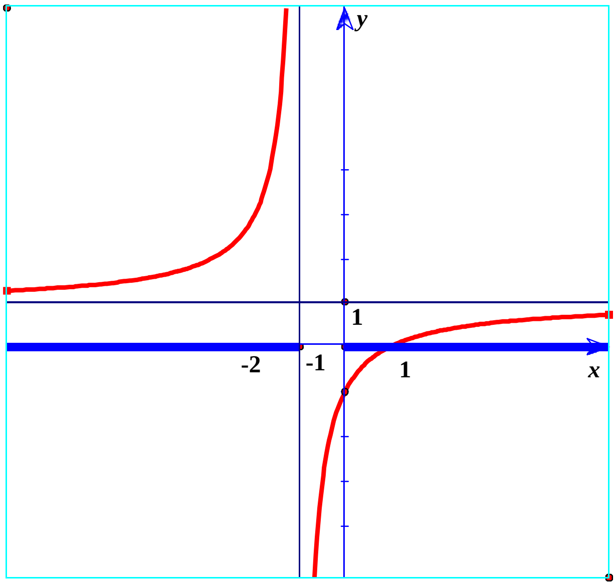
C.



D.

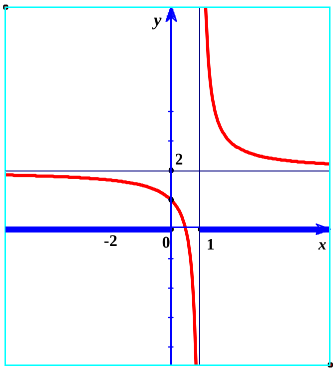


Câu 31. Xác định *a*, *b* để hàm số $y = \dfrac{ax - 1}{x + b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a=1, b=-1$.   **B.** $a=1, b=1$.   **C.** $a=-1, b=1$.   **D.** $a=-1, b=-1$.

Câu 32. Xác định *a, b, c* để hàm số $y=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a=2,\ b=-1,\ c=1$.   **B.** $a=2,\ b=1,\ c=1$.

C. $a=2,\ b=2,\ c=-1$.   **D.** $a=2,\ b=1,\ c=-1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đi qua điểm $A(2;-3)$. Lúc đó hàm số $y=\dfrac{ax+1}{cx+d}$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

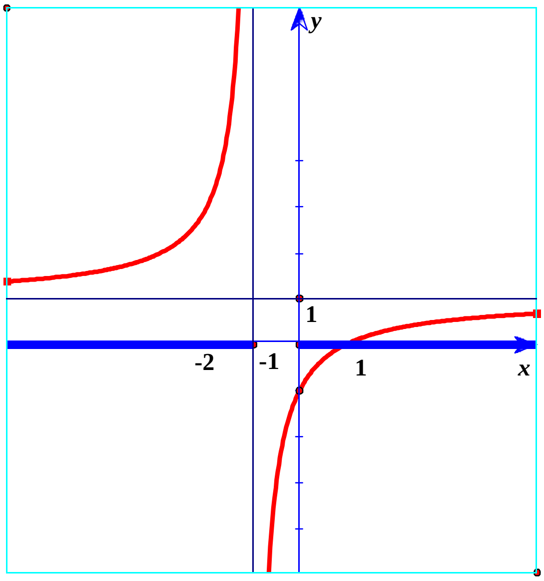
A. $y=\dfrac{-3}{5}.\dfrac{2x+1}{x-1}$.   **B.** $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$.   **C.** $y=\dfrac{-2x-1}{-x+1}$.   **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 34. Bảng biến thiên ở hình bên dưới là bảng biến thiên của một trong bốn hàm số ở các đáp án A, B, C, **D.** Hàm số đó là hàm số nao?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.   **B.** $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.   **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.   **D.** $y=\dfrac{2x-5}{x+1}$.

Câu 35. Cho đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ hình bên. Khẳng định nào đúng?



A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -1$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -1\right)$ và $\left(-1; +\infty\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -1\right)$ và $\left(-1; +\infty\right)$.

D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 36. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Khẳng định nào sau đây và khẳng định đúng?

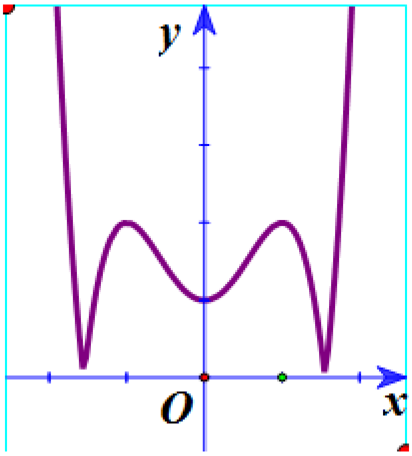
A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

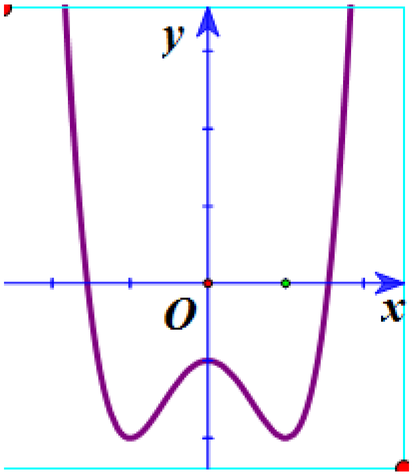
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; 0\right)$ và $\left(0; +\infty\right)$.

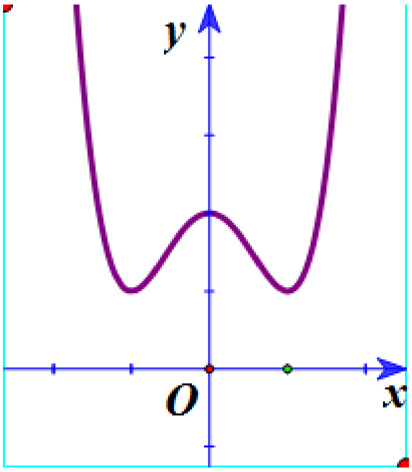
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

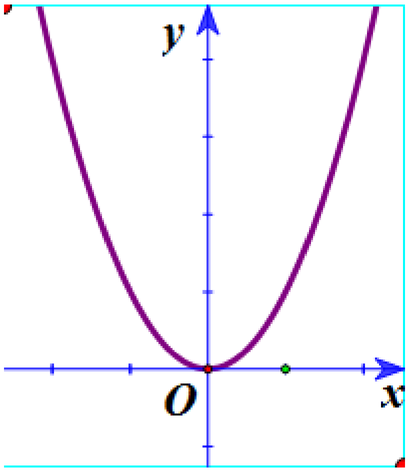
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 37. Đồ thị của hàm số $y = \left|x^4 - 2x^2 - 1\right|$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau

A. 

B. 

C. 

D. 

Câu 38. Giả sử đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Ox qua trái 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của một hàm số trong 4 hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2$.
B. $y = (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 1$.
C. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
D. $y = (x+1)^4 - 2(x+1)^2 - 1$.

Câu 39. Giả sử đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Oy lên trên 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của hàm số

A. $y = x^4 - 2x^2$.
B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
C. $y = (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 1$.
D. $y = (x+1)^4 - 2(x+1)^2 - 1$.

Câu 40. Giả sử đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Oy xuống dưới 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của hàm số:

A. $y = f(x) - 1$. **B.** $y = f(x-1)$. **C.** $y = f(x) + 1$. **D.** $y = f(x+1)$.

Câu 41. Giả sử đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Ox qua phải 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của hàm số:

A. $y = f(x) + 1$. **B.** $y = f(x+1)$. **C.** $y = f(x-1)$. **D.** $y = f(x) - 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên □ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y			0				$+\infty$

$-\infty$ $\qquad\qquad$ -4

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có một cực đại bằng 0 và có một cực tiểu bằng -4 .

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -4 .

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3 và giá trị cực đại bằng 1.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và đạt cực đại tại $x=3$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên □ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

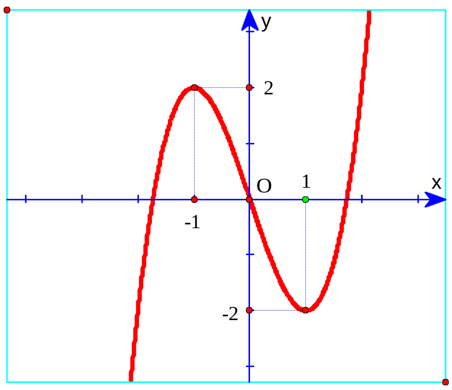
A. Hàm số có một cực đại bằng 0 và có một cực tiểu bằng -4 .

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -4 .

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3 và giá trị cực đại bằng 1.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và đạt cực đại tại $x=3$.

Câu 44. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$ như hình sau. Chọn đáp án đúng?



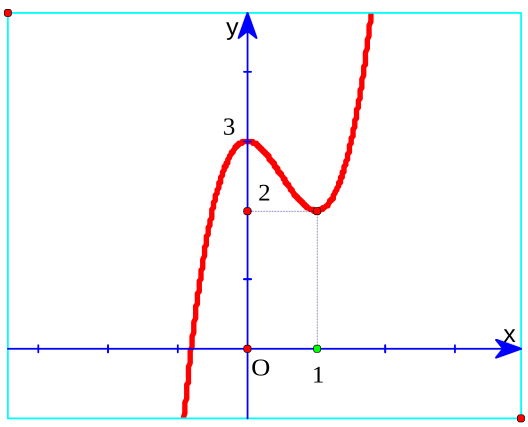
A. Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm là $x=0$.

B. Hàm số đồng biến trên đoạn $(-2;1)$ và $(1;\,2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số có hệ số $a<0$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào sau đây là **sai** ?



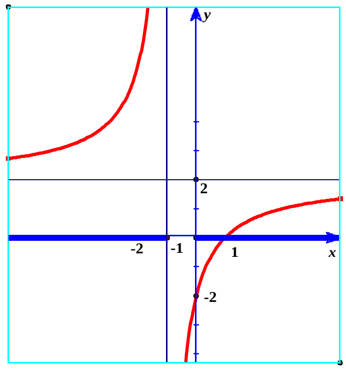
A. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

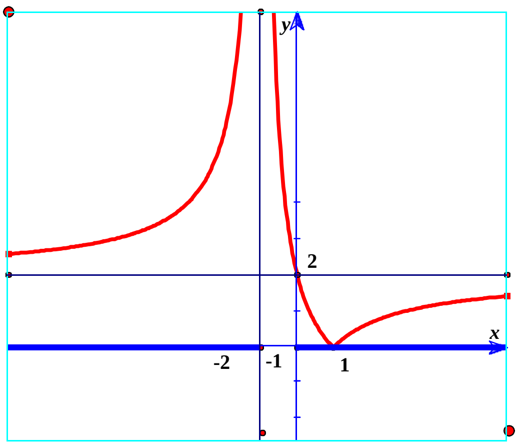
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 46. Biết đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ là hình vẽ sau:

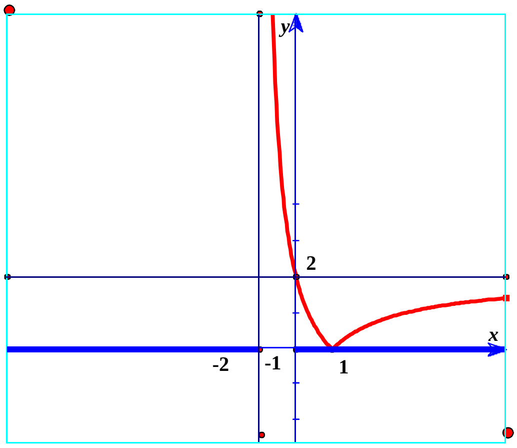


Đồ thị hàm số $y = \left|\dfrac{2x-2}{x+1}\right|$ là hình vẽ nào trong 4 hình vẽ sau:

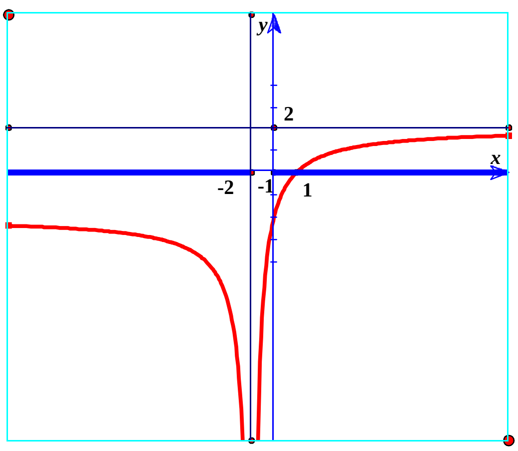
A.



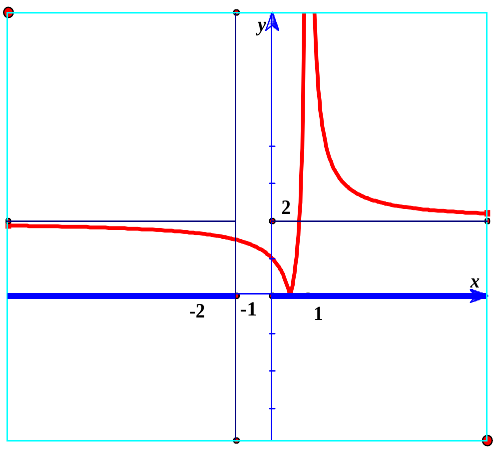
B.



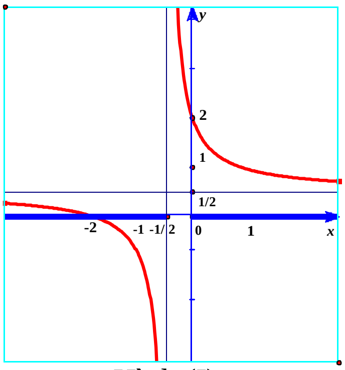
C.



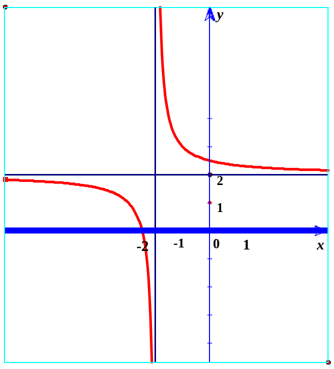
D.



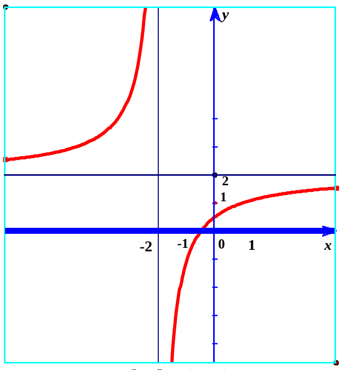
Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho? Hãy chọn đáp án **sai**?



Hình (I)



Hình (II)



Hình (III)

A. Hình (I) và (III). **B.** Hình (III). **C.** Hình (I). **D.** Hình (II).

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

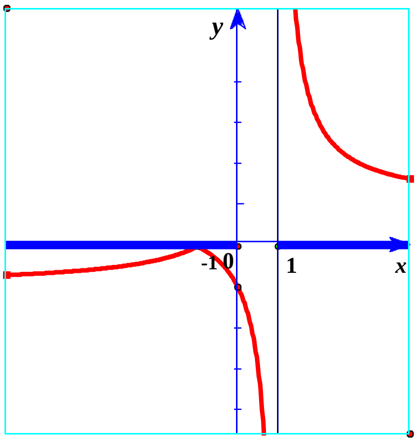
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	|	$+$	
y	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↗	1

Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên là hàm số nào dưới đây:

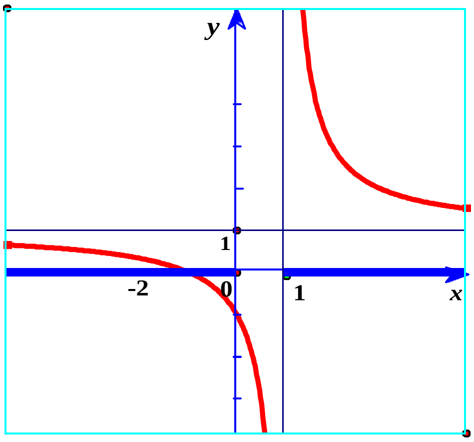
A. $y=\dfrac{\square 1}{x(x+1)}$. **B.** $y=|x|(x+1)$. **C.** $y=\dfrac{x}{|x+1|}$. **D.** $y=\dfrac{|x|}{x+1}$.

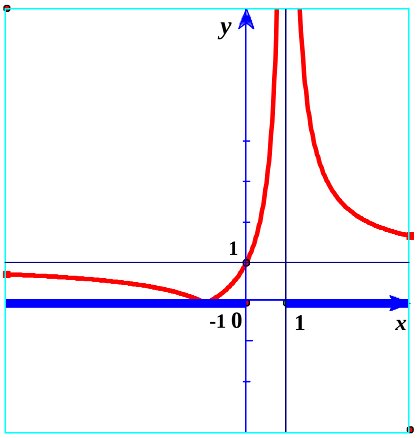
Câu 49. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x+1|}{x-1}$ là hình vẽ nào trong các hình vẽ sau:

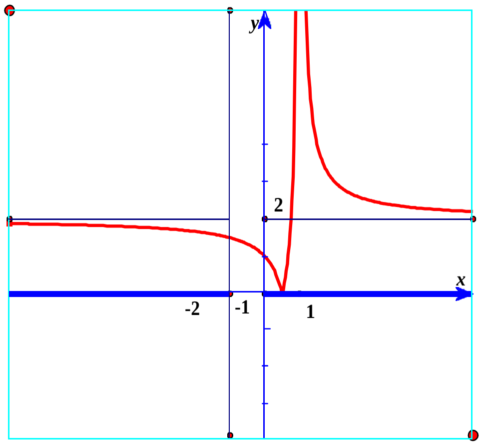
A.



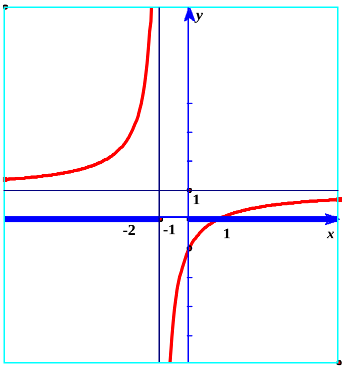
B.



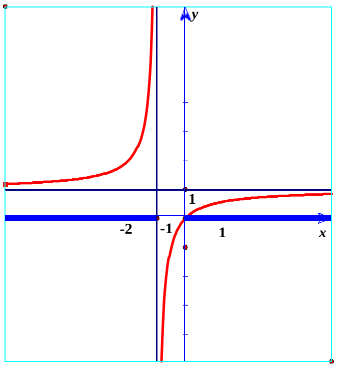
C. 

D. 

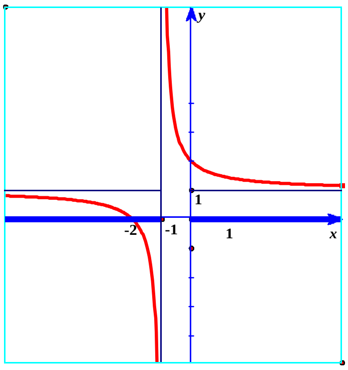
Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 1}{x + 1}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?



Hình (I)



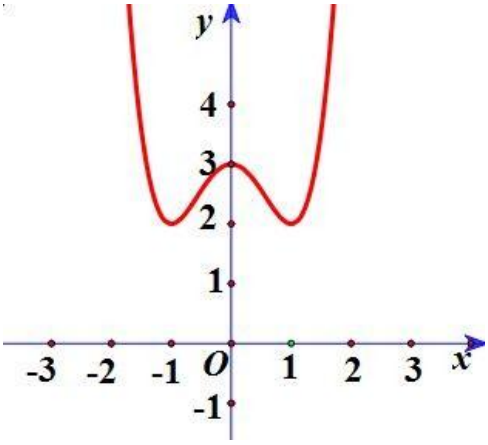
Hình (II)

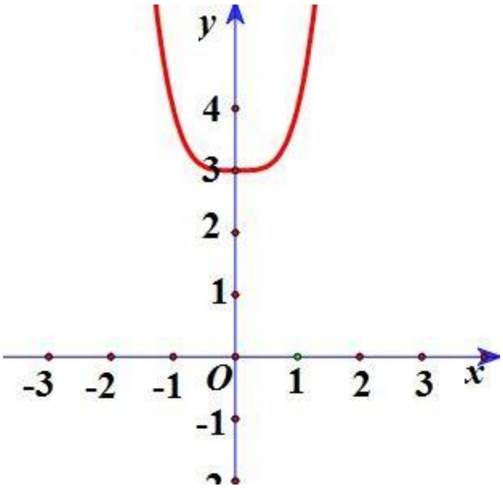


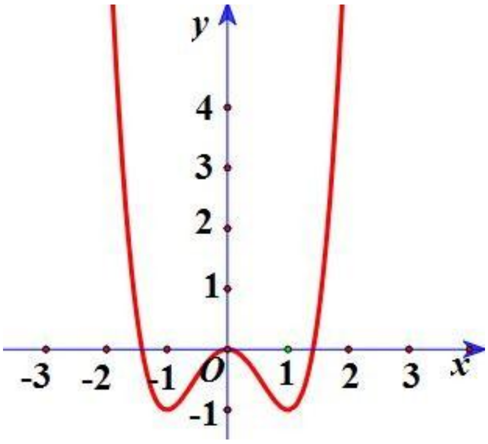
Hình (III)

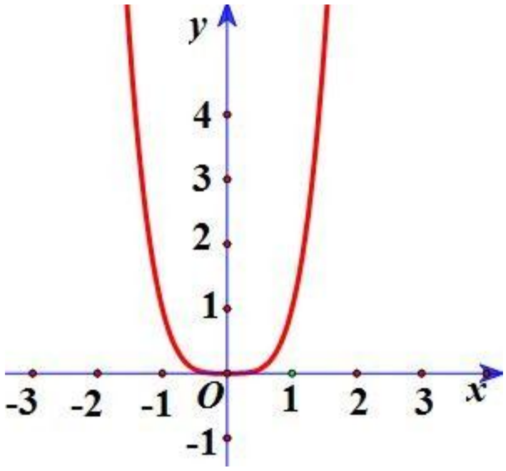
A. Hình (I) và (II). **B.** Hình (I). **C.** Hình (I) và (III). **D.** Hình (III).

Câu 51. Cho hàm số $y = x^4 - \left(m^2 + 1\right)x^2 + 3$. Đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số đã cho?

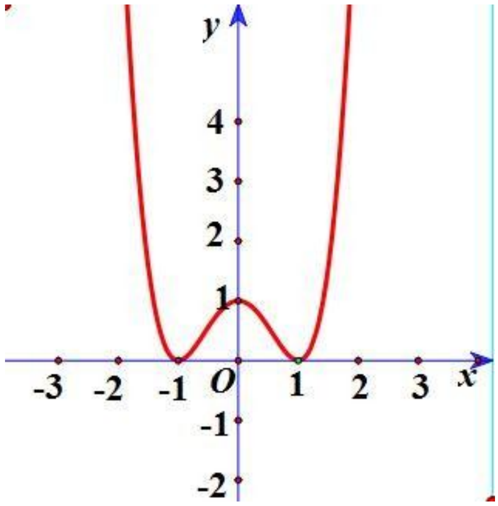
A. 

B. 

C. 

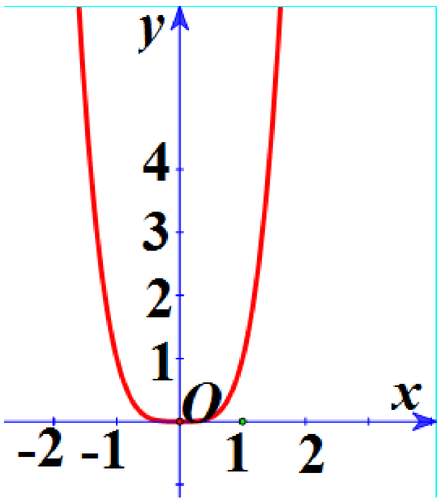
D. 

Câu 52. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



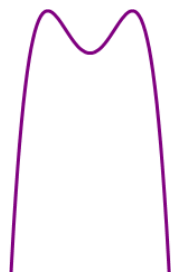
A. $a < 0, b > 0, c = 1$.
B. $a > 0, b > 0, c = 1$.
C. $a > 0, b < 0, c = 1$.
D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

Câu 53. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó:



A. $a > 0, b > 0, c > 0$.
B. $a > 0, b \geq 0, c = 0$.
C. $a < 0, b \leq 0, c = 0$.
D. $a > 0, b < 0, c = 0$.

Câu 54. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó



A. $a>0, b<0, c>0$. **B.** $a>0, b>0, c>0$. **C.** $a<0, b>0, c>0$. **D.** $a<0, b>0$.

Câu 55. Cho hàm số $y=x^4+bx^2+c$ có đồ thị (C). Chọn khẳng định đúng nhất:

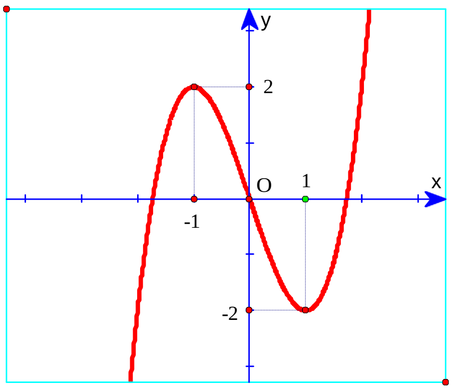
A. Đồ thị (C) có ít nhất một điểm cực đại.

B. Đồ thị (C) có đúng một điểm cực tiểu.

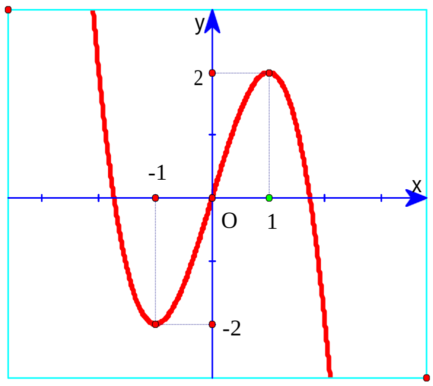
C. Đồ thị (C) có ít nhất một điểm cực tiểu.

D. Đồ thị (C) có đúng một điểm cực đại.

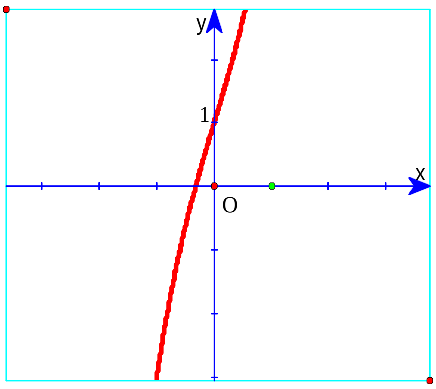
Câu 56. Cho hàm số bậc 3 có dạng: $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.



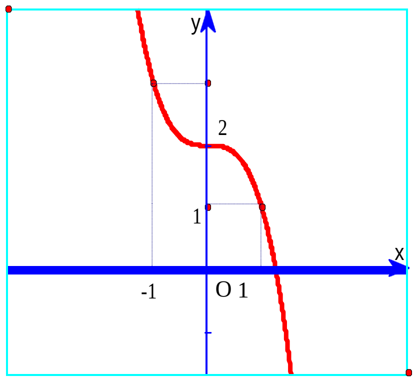
(I)



(II)



(III)



(IV)

Hãy chọn đáp án đúng?

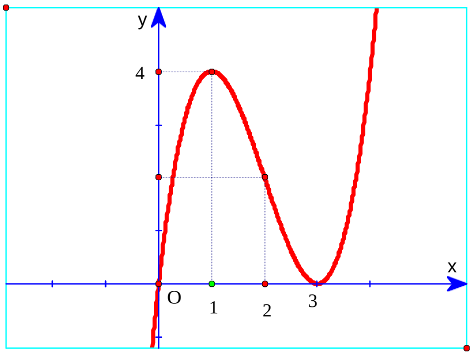
A. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có nghiệm kép.

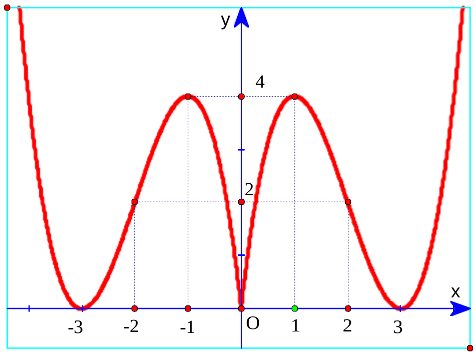
B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a\neq 0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

D. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 57. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



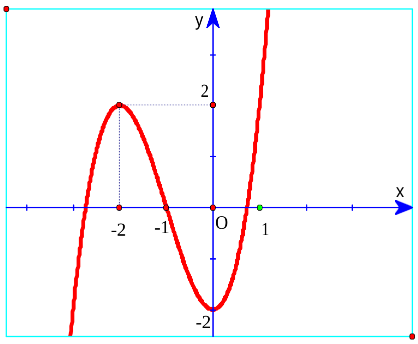


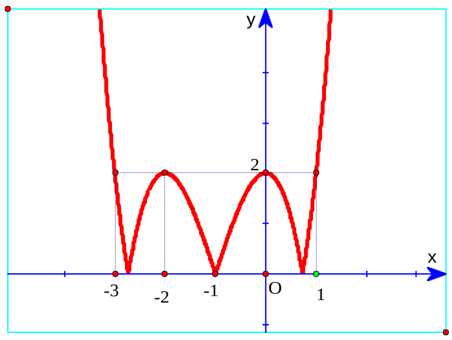
Hình 1 Hình 2

A. $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$. **B.** $y=|x|^3-6x^2+9|x|$.

C. $y=|x^3-6x^2+9x|$. **D.** $y=-x^3+6x^2-9x$.

Câu 58. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



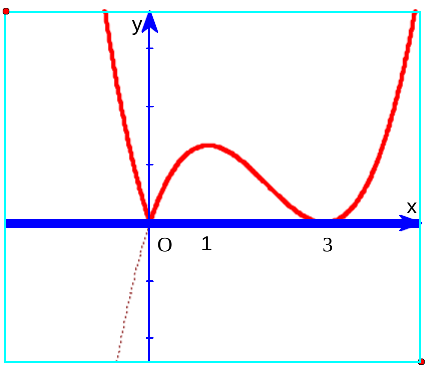


Hình 1 Hình 2

A. $y=-x^3-3x^2+2$. **B.** $y=|x|^3+3|x|^2-2$.

C. $y=\left||x|^3+3x^2-2\right|$. **D.** $y=|x^3+3x^2-2|$.

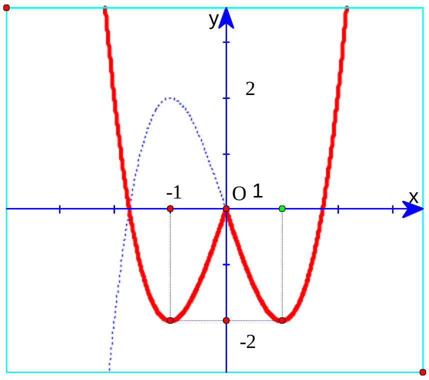
Câu 59. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\left|\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right|$. **B.** $y=|x|^3-2x^2+3|x|$.

C. $y=|x^3-2x^2+3x|$. **D.** $y=\frac{1}{3}|x|^3-2x^2+3|x|$

Câu 60. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\left|x^3\right|-3|x|$. **B.** $y=\left|x^3+3x\right|$. **C.** $y=|x|^3+3|x|$. **D.** $y=\left|x^3-3x\right|$.

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	B	A	C	A	D	B	B	A	C	D	C	A	C	D	C	B	A	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	C	A	A	A	A	B	C	D	B	D	B	A	C	A	A	D	A	A

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	A	A	A	B	A	D	D	A	B	A	C	B	D	C	D	B	D	A	A

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$. Tiệm cận ngang $y=1$ nên loại **trường hợp D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;\,2)$ nên chọn **đáp án A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)\Bigg|_{x=10}=\dfrac{1}{81}>0$ suy ra hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định**, loại B, D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;\,2)$ nên chọn **đáp án A.**

Câu 2. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

Hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ có tiệm cận đứng $x=-2$. Tiệm cận ngang $y=2$ nên loại **đáp án B, D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ đi qua điểm $(-3;\,4)$ nên chọn **đáp án A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)_{x=1} \approx 0,2 > 0$ suy ra hàm số $y = \frac{2+2x}{2+x}$ đồng biến trên tập xác định, **loại D.**

Sử dụng chức năng CALC của máy tính: $CALC \to -3 = 4$ nên chọn **đáp án A.**

Câu 3. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án **A, C.**

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có $ab - bc = 1 > 0$ nên loại đáp án **D.**

Hàm số $y = \frac{2x+5}{x+1}$ có $ad - bc = -3 < 0$ nên chọn đáp án **B.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án **A, C.**

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)\Bigg|_{x=1} = 0,25 > 0$ suy ra hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ đồng biến trên tập xác định, **loại D.**

Câu 4. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận]

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$. Loại **B, D.**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1)$.

$y = \frac{2x+1}{x+1}$ khi $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Loại đáp án **B.**

$y = \frac{2x-1}{x+1}$ khi $x = 0 \Rightarrow y = -1$. Chọn đáp án **A.**

Câu 5. **Chọn C.**

[Phương pháp tự luận]

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -1$. suy ra loại đáp án **A.**

Nhìn vào bảng biến thiên , hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

$y = \frac{-x-2}{x-1}$ có $ad - bc = 3 > 0$. Loại đáp án **B.** $y = \frac{-x-3}{x-1}$ có $ad - bc = 4 > 0$. Loại đáp án **D.**

$y = \frac{-x+3}{x-1}$ có $ad - bc = -2 < 0$. Chọn đáp án **C.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -1$

suy ra loại đáp án **A.**

Nhìn vào bảng biến thiên , hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x-2}{x-1}\right)\bigg|_{x=0}=3>0$ suy ra loại đáp án **B.**

$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x-3}{x-1}\right)\bigg|_{x=0}=4>0$ suy ra loại đáp án **D.**

$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x+3}{x-1}\right)\bigg|_{x=0}=-2<0$ suy ra chọn đáp án **C.**

Câu 6. **Chọn A.**

Hàm số $y=\frac{3x+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$ tiệm cận ngang $y=3$

Câu 7. **Chọn D.**

Nhìn vào ta thấy đây là hàm số có dạng $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ nên không có cực trị.

Câu 8. **Chọn A.**

Nhìn vào ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=-1$ tiệm cận ngang $y=2$.

Câu 9. **Chọn B.**

Nhìn vào ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=0$ tiệm cận ngang $y=1$

Câu 10. **Chọn A.**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ tiệm cận ngang $y=-1$

Câu 11. **Chọn C.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có 3 cực trị nên $a>0,\ b<0$. Do đó loại B, D. Do đồ thị qua $O(0;0)$ nên $c=0$ loại A.

Câu 12. **Chọn D.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có 1 cực trị và hướng xuống nên $a<0,\ b<0$ nên loại A, B, C.

Câu 13. **Chọn C.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có 3 cực trị và hướng xuống nên $a<0, b>0$ nên loại A, B, D.

Câu 14. **Chọn A.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ có 1 cực trị và hướng lên nên $a>0,\ b>0$ nên loại B, C, D.

Câu 15. **Chọn C.**

Từ đồ thị suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ nên loại A, B, D

Câu 16. **Chọn D.**

Từ đồ thị ta suy ra các tính chất của hàm số:

1. Hàm số đạt CĐ tại $x=0$ và đạt CT tại $x=\pm 1$.

2. Hàm số tăng trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

3. Hàm số giảm trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

4. Hàm số không có tiệm cận.

Câu 17. **Chọn C.**

Từ đồ thị suy ra:
1. Hàm số đạt CĐ tại $x=\pm 1$, đạt CT tại $x=0$.
2. Hàm số không có GTNN vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ và GTLN của hàm số là 2 khi $x=\pm 1$.

Câu 18. **Chọn A.**

Hàm số qua $(0;-1)$ do đó loại B, C. Do $a>0$ nên đồ thị hướng lên suy ra đáp án A.

Câu 19. **Chọn A.**

Hướng dẫn giải:

Do $a>0$, $b>0$ nên hàm số chỉ có 1 cực tiểu, suy ra loại B

Hàm số qua $(1;2)$ nên loại C, D.

Câu 20. **Chọn A.**

Do $a<0$, $b<0$ nên đồ thị hướng xuống và chỉ có 1 cực trị nên loại B, D.

Hàm số qua $(0;1)$ nên loại C.

Câu 21. **Chọn B.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a>0$ nên ta loại phương án A và D và $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$ hoặc $x=2$ nên chỉ có phương án B là phù hợp.

Câu 22. **Chọn D.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a>0$ nên ta loại phương án A và B và $y'=0$ có nghiệm kép là $x=1$ nên chỉ có phương án D là phù hợp.

Câu 23. **Chọn C.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a<0$ nên ta loại phương án A và B $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$ hoặc $x=2$ nên chỉ có phương án C là phù hợp.

Câu 24. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=2$ nên loại cả ba phương án B, C và D.

Câu 25. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=1$ nên loại cả ba phương án D, $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0; x=1$ và với $x=1$ thì $y=-1$ nên chỉ có phương án A là phù hợp.

Câu 26. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=0$ nên loại phương án D.

Dựa vào đồ thị, thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên loại hai phương án B và C.

Câu 27. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=1$ nên loại phương án D.

Dựa vào đồ thị, thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên loại hai phương án B và C.

Câu 28. **Chọn B.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=0$ nên loại cả hai phương án A, C.

Dựa vào đồ thị, thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a<0$ nên loại phương án D.

Câu 29. **Chọn C.**

Để ý khi 2 thì $(-1;4),(1;4)$ nên loại cả ba phương án D.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $y=x^3+3x^2-2$ nên loại phương án B.

Một dữ kiện nữa là đồ thị đi qua điểm 1 nên loại luôn phương án A.

Câu 30. **Chọn A.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2),$ điểm cực tiểu là $(1;-2)$ nên loại ba phương án B, C, D.

Câu 31. **Chọn B.**

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$ (1)

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ có tiệm cận đứng $x=-b$, tiệm cận ngang $y=a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1$, $b=1$.

Câu 32. **Chọn D.**

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đồ thị đi qua điểm $(0;1)$

(1). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ có tiệm cận đứng $x=-b$, tiệm cận ngang $y=a$ và đi qua điểm $\left(0;\dfrac{-1}{b}\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $a=2$, $b=1$, $c=-1$;

Câu 33. **Chọn B.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$

Theo đề bài ta có $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=2\\ -\dfrac{d}{c}=2\\ \dfrac{a.2-1}{c.2+d}=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2c\\ -d=2c\\ 2a-1=-6c-3d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-2c=0\\ 2c+d=0\\ 2a+6c+3d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ c=-1\\ d=1\end{cases}$

Câu 34. **Chọn A.**

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Đáp án C sai vì tiệm cận đứng $x=\frac{1}{2}$. đáp án D sai vì tiệm cận đứng $x=-1$, đáp án B sai vì $y'=\frac{1}{(x-1)^2}>0$

Câu 35. **Chọn C.**

Đáp án A sai vì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.
Đáp án B sai vì hàm số đồng biến
Đáp án D sai vì hàm số không có cực trị.

Câu 36. **Chọn A.**

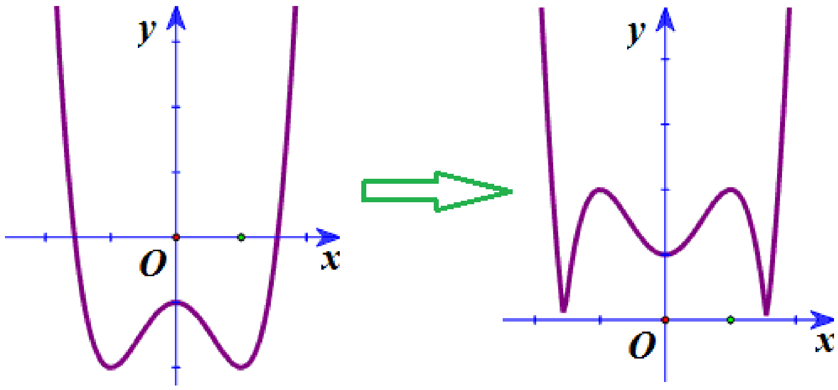
Đáp án A đúng vì có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$, $y=-1$.

Đáp án B sai vì hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;0)$

Đáp án C sai vì đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.
Đáp án D sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 37. **Chọn A.**

Vẽ đồ thị $y=x^4-2x^2-1$. Giữ nguyên phần đồ thị trên Ox, phần dưới Ox thì lấy đối xứng qua Ox ta được đồ thị cần vẽ



Câu 38. **Chọn D.**

Đặt $f(x)=x^4-2x^2-1$ thì khi tịnh tiến (C) theo Ox qua trái 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của $y=f(x+1)=(x+1)^4-2(x+1)^2-1$.

Câu 39. **Chọn A.**

Đặt $f(x)=x^4-2x^2-1$ thì khi tịnh tiến (C) theo Oy lên trên 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của $y=f(x)+1=x^4-2x^2$.

Câu 40. **Chọn A.**

Theo lý thuyết, ta chọn câu A.

Câu 41. **Chọn C.**

Theo lý thuyết, ta chọn câu C.

Câu 42. **Chọn A.**

Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và đạt cực đại tại $x=1$ nên loại phương án C. Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$; y' đổi dấu và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ nên hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất nên loại phương án B. Hàm số có giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-4$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=0$ nên loại phương án D.

Câu 43. **Chọn A.**

Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và đạt cực đại tại $x=1$ nên loại phương án C. Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$; y' đổi dấu và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ nên hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất nên loại phương án B. Hàm số có giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-4$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=0$ nên loại phương án D.

Câu 44. **Chọn A.**

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số đã cho là hàm bậc ba có hệ số $a>0$ và có hai điểm cực trị nên loại các phương án C, D. Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ nên loại luôn phương án B.

Câu 45. **Chọn B.**

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy các phương án B, C, D đều đúng.

Câu 46. **Chọn A.**

Ta có $y=\left|\dfrac{2x-2}{x+1}\right|=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x+1} & \text{nÕu } \dfrac{2x-2}{x+1}\geq 0\\ -\dfrac{2x-2}{x+1} & \text{nÕu } \dfrac{2x-2}{x+1}<0\end{cases}$

Đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{2x-2}{x+1}\right|$ có được bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ nằm phía trên trục hoành.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Câu 47. **Chọn D.**

Hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$, $y'<0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow -1<m<1$; $y'>0\Leftrightarrow m^2-1>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1\\ m<-1\end{array}\right.$. Hình (I) có $m=-\dfrac{1}{2}\in(-1;1)$ nên $y'<0$ suy ra hàm số nghịch biến, do đó Hình (I) đúng. Hình (II) có $m=-\dfrac{3}{2}<-1$ nên $y'>0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (II) sai. Hình (III) có $m=-2<-1$ nên $y'>0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (III) đúng.

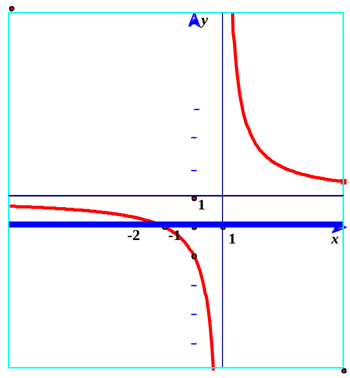
Câu 48. **Chọn D.**

Đáp án B sai vì $\lim_{x\to+\infty} |x|(x+1) = +\infty$. Đáp án C sai vì $y = \frac{x}{|x+1|} = \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2}}$ có $y'(0) = 1$

$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{|x+1|}\right)\Big|_{x=0} = 1\right)$. Đáp án A sai vì $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x+1)} = 0$

Câu 49. **Chọn A.**

Vẽ đồ thị **hàm số** $y = \frac{x+1}{x-1}$



$$y = \frac{|x+1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{nÕu } x \geq -1 \\ -\frac{x+1}{x-1} & \text{nÕu } x < -1 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ có được bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ nằm phía bên phải đường thẳng $x = -1$.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ nằm phía bên trái đường thẳng $x = -1$ qua trục hoành.

Câu 50. **Chọn B.**

Hàm số $y = \frac{x - m^2 - 1}{x+1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$y' = \frac{m^2+2}{(x+1)^2}$ suy ra $y' > 0 \forall m$, và $y = \frac{x - m^2 - 1}{x+1}$ đi qua điểm $(0; -1)$.

Hình (I) đúng.

Hình (II) sai vì không đi qua điểm $(0; -1)$.

Hình (III) sai vì không đi qua điểm $(0; -1)$.

Câu 51. **Chọn A.**

Do $a = 1, b = -(m^2+1) < 0$ nên đồ thị hàm số hướng lên và có 3 cực trị (loại B, D). Đồ thị hàm số qua (0; 3) nên **Chọn A.**

Câu 52. **Chọn C.**

Do đồ thị qua (0; 1) nên $c = 1$. Đồ thị hướng lên nên $a > 0$ và có 3 cực trị nên $ab < 0$ suy ra $b < 0$. Do đó chọn câu C.

Câu 53. **Chọn B.**

Đồ thị hướng lên nên $a > 0$. Có 1 cực trị nên $ab \geq 0$ suy ra $b \geq 0$. Qua (0; 0) nên $c = 0$. Do đó chọn câu B.

Câu 54. **Chọn D.**

Đồ thị hướng xuống và có 3 cực trị nên $a < 0, b > 0$ suy ra câu A (c không có điều kiện)

Câu 55. **Chọn C.**

Do $a = 1 > 0$ nên (C) có 2 trường hợp là có 1 điểm cực tiểu hay có 2 điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 56. Chọn D .

Hàm số của đồ thị (II) có $a < 0$ nên điều kiện $a \neq 0$ chưa đảm bảo. Do đó loại phương án B.

Hàm số của đồ thị (I) có $a > 0$ nên loại luôn phương án C.

Hàm số của đồ thị (IV) có $a < 0$ nên loại luôn phương án D.

Câu 57. **Chọn B.**

Đồ thị Hình 2 đối xứng nhau trục tung và đi qua điểm $(-1;4),(1;4)$ nên phương án B là phù hợp nhất.

Câu 58. **Chọn D.**

Vì đồ thị Hình II nằm phía trên trục hoành và đi qua điểm $(-1; 0)$.

Câu 59. **Chọn A.**

Vì đồ thị nằm phía trên trục hoành và đi qua điểm $(3; 0)$.

Câu 60. **Chọn A.**

Vì đồ thị đối xứng nhau trục tung và đi qua điểm $(-1; -2)$, $(1; -2)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

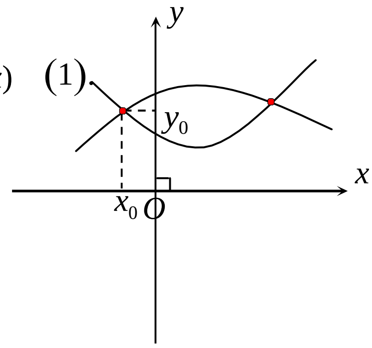
1. Sách giáo khoa Giải tích 12 – Chương trình chuẩn – Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam.
2. Sách giáo khoa Giải tích 12 – Chương trình nâng cao – Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam.
3. Sách bài tập Giải tích 12 – Chương trình chuẩn – Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam.
4. Sách bài tập Giải tích 12 – Chương trình nâng cao – Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam.

NHÓM BIÊN SOẠN

1. Trần Anh Tuấn, Trường THPT Thanh Đa, Quận Bình Thạnh, TPHCM.
   Email: anhtuan030791@gmail.com, Số điện thoại: 01212959018, Facebook: namtang91.
2. Nguyễn Đăng Tuấn, Hương Trà, Thừa Thiên Huế.
   Email: dangtuan09@gmail.com, Số điện thoại: 0973637952, Facebook: mautrangtigon.
3. Dương Công Tạo, Trường THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa, Châu Thành, Tiền Giang.
   Email: taonamky@gmail.com, Số điện thoại: 0975171866. Facebook: congtao.duong.94

CHỦ ĐỀ 2.1. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN



Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y=g(x)$ có đồ thị (C_2).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x)=g(x)$ (1).

Khi đó:

- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm của phương trình (1).
- Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y=f(x)$ hoặc $y=g(x)$.
- Điểm $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (C) và hàm số bậc nhất $y=kx+n$ có đồ thị d.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: ax^3+bx^2+cx+d=kx+n$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc ba nên có ít nhất một nghiệm. Ta có 2 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Phương trình (1) có *"nghiệm đẹp"* x_0.

  Thường thì đề hay cho nghiệm $x_0=0;\ \pm 1;\ \pm 2;...$ thì khi đó:

  $$(1)\Leftrightarrow (x-x_0)\left(Ax^2+Bx+C\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-x_0=0 \\ Ax^2+Bx+C=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

  Khi đó:

  + (C) và d có ba giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm x_0. (*Đây là trường hợp thường gặp*)

  + (C) và d có hai giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm x_0 hoặc phương trình (2) có nghiệm kép khác x_0.

  + (C) và d có một giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm kép là x_0.

- **Trường hợp 2:** Phương trình (1) không thể nhẩm được *"nghiệm đẹp"* thì ta biến đổi phương trình (1) sao cho hạng tử chứa x tất cả nằm bên vế trái, các hạng tử chứa tham số m nằm bên vế phải, nghĩa là $(1)\Leftrightarrow f(x)=g(m)$.

  Ta khảo sát và vẽ bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ và biện luận số giao điểm của (C) và d theo tham số m.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Vậy có ba giao điểm $A(0;1), B(1;1), C(2;1)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x+2)\left[mx^2 - (2m+1)x + 4m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -2 & \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 12m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq -\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x\left(2x^2 - 3mx + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3mx + m = 0\,(*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{8}{9}; +\infty\right).$$

Vậy $m \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{8}{9};+\infty\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$x^3 + mx + 2 = 0.$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, nên phương trình tương đương với

$$m = -x^2 - \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x}$ với $x \neq 0$, suy ra $f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2}{x^2}$. Vậy

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$. Vậy $m > -3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x = -m \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường (C): $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ và đường thẳng $d: y = -m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và d.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-27	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -27 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 27.$$

Ví dụ 6: Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k ($k \in \mathbb{R}$). Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt A, B, C và tam giác OBC có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc k nên có dạng $y = k(x+1)$, hay

$$kx - y + k = 0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2 - 4x + 4 - k = 0 \end{array}\right.$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}.$$

Khi đó $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{k}; x = 2 + \sqrt{k}$. Vậy các giao điểm của hai đồ thị lần lượt là

$$A(-1;0),\ B\left(2-\sqrt{k};3k-k\sqrt{k}\right),\ C\left(2+\sqrt{k};3k+k\sqrt{k}\right).$$

Tính được $BC = 2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}$, $d(O,BC) = d(O,d) = \dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$. Khi đó

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2} = 1 \Leftrightarrow |k|\sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1.$$

Vậy $k = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

II. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: ax^4 + bx^2 + c = k$ (1)

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$ ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0$ (2)

- (C) và d có bốn giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) thỏa $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$. *(Trường hợp này thường gặp)*
- (C) và d có ba giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.
- (C) và d có hai giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.
- (C) và d không có giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.
- (C) và d có một giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^4 + 2x^2 - 3$ và trục hoành.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4+2x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-3 \end{array}\right. \Rightarrow x=1 \vee x=-1$.

Vậy có hai giao điểm: $A(-1;0)$, $B(1;0)$.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $x^4-2x^2-m+3=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình: $x^4-2x^2-m+3=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+3=m \quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y=x^4-2x^2+3$ và đường thẳng $d: y=m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và d.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=4x^3-4x$; $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2<m<3$. Vậy $2<m<3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m-2 \quad (C_m)$. Định m để đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $d: y=-2$ tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:

$$x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m-2=-2 \Leftrightarrow x^4-2(m+1)x^2+m^2-3m=0 \quad (1).$$

Đặt $t=x^2 \quad (t\ge 0)$, phương trình trở thành

$$t^2-2(m+1)t+m^2-3m=0 \; (2).$$

(C_m) và d có bốn giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m+1>0 \\ m^2-3m>0 \\ 2(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{5} \\ m<0,\ m>3 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{5}<m<0 \\ m>3 \end{array}\right..$$

Vậy $m\in\left(-\dfrac{1}{5};0\right)\cup(3;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m \; (C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=-1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 2.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: y=-1$ là

$$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1 \Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0.$$

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$, ta có phương trình

$$t^2-(3m+2)t+3m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3m+1 \end{array}\right.$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=3m+1 \end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<m<1$ và $m\ne 0$. Vậy $-\frac{1}{3}<m<1$ và $m\ne 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^4-(3m+4)x^2+m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-(3m+4)x^2+m^2=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-(3m+4)t+m^2=0$ (2)

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=5m^2+24m+16>0 \\ P=m^2>0 \\ S=3m+4>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<-4 \vee m>-\frac{4}{5} \\ m\ne 0 \\ m>-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{4}{5} \\ m\ne 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $0<t_1<t_2$. Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là $x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$. Bốn nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3 \Leftrightarrow -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1\ (3)$$

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1+t_2=3m+4 & (4) \\ t_1t_2=m^2 & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta suy ra được $\begin{cases} t_1=\dfrac{3m+4}{10} \\ t_2=\dfrac{9(3m+4)}{10} \end{cases}$ (6).

Thay (6) vào (5) ta được $\frac{9}{100}(3m+4)^2=m^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m+4)=10m \\ 3(3m+4)=-10m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=12 \\ m=-\frac{12}{19} \end{array}\right. \text{(thỏa (*))}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=12;\ m=-\frac{12}{19}$.

III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y=kx+n$ có đồ thị d.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=kx+n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2+Bx+C=0 & (1) \\ x\neq -\frac{d}{c} \end{cases}$$

(C) và d có hai giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị $(C): y=\frac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{2x-1}=x+2$ (1)

Điều kiện: $x\neq\frac{1}{2}$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2)\Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ x=1\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $(1;3)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1}=-x+m$ (1)

Điều kiện: $x\neq 1$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2x-1=(-x+m)(x-1)$

$$\Leftrightarrow x^2-(m-1)x+m-1=0\ (2)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=\left[-(m-1)\right]^2-4(m-1)>0 \\ 1-(m-1).1+m-1\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2-6m+5>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+2}$ có đồ thị là $(C)_m$. Tìm m để đường thẳng $d: y=2x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{mx-1}{x+2}=2x-1$ (1)

Điều kiện: $x\neq -2$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow mx-1=(2x-1)(x+2)\Leftrightarrow 2x^2-(m-3)x-1=0$ (2)

d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt $A, B\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left[-(m-3)\right]^2+8>0\\ 8+2m-6-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq -\frac{1}{2}\ (*)$$

Đặt $A(x_1;2x_1-1);\ B(x_2;2x_2-1)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m-3}{2}\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, khi đó

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=10$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{m-3}{2}\right)^2+2=2\Leftrightarrow m=3\qquad \text{(thỏa (*))}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=3$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho tam giác OAB có diện tích là $\sqrt{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{2x+1}{x+1}=-2x+m\Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(-2x+m)\ \text{(điều kiện: } x\neq -1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+(4-m)x+1-m=0\ \ (1)\ \text{(điều kiện: } x\neq -1\text{).}$$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+8>0\ \ \forall m\\ 2.(-1)^2+(4-m)(-1)+1-m\neq 0\end{cases}.$$

Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1);\ B(x_2;y_2)$, trong đó $y_1=-2x_1+m;\ y_2=-2x_2+m$ và x_1, x_2 là các nghiệm của (1). Theo định lý Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m-4}{2}\\ x_1x_2=\dfrac{1-m}{2}\end{cases}$. Tính được:

$$d(O;AB)=\frac{|m|}{\sqrt{5}};\ AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1+x_2)^2-20x_1x_2}=\frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}AB.d\left(O;AB\right)=\frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4}=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=2\vee m=-2.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=2$; $m=-2$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+2k+1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng các từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1\Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(kx+2k+1) \text{(điều kiện: } x\neq -1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow kx^2+(3k-1)x+2k=0 \quad (1). \text{ (điều kiện: } x\neq -1\text{)}$$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0\\ \Delta=k^2-6k+1>0\\ k(-1)^2+(3k-1)(-1)+2k\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0\\ k<3-2\sqrt{2}\vee k>3+2\sqrt{2}\end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1;kx_1+2k+1)$, $B(x_2;kx_2+2k+1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-3k+1}{k}\\ x_1x_2=2\end{cases}$. Tính được

$$d\left(A;Ox\right)=d\left(B;Ox\right)\Leftrightarrow |kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_1+2k+1=kx_2+2k+1\\ kx_1+2k+1=-kx_2-2k-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2 \text{ (loại)}\\ k(x_1+x_2)+4k+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow k\left(x_1+x_2\right)+4k+2=0\Leftrightarrow k=-3.$$

Vậy $k=-3$ thỏa yêu cầu bài toán.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2-1$ với trục Ox là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x+3)(x^2+3x+2)$ với trục Ox là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 3. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-12$ và trục Ox là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 4. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;0)$; $(2;1)$.

C. $(0;-1)$; $(2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 5. Đồ thị $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=2x-3$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(2;-1);\ \left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$. **B.** $(2;1);\ \left(-\dfrac{1}{2};-4\right)$.

C. $(-1;-5);\ \left(\dfrac{3}{2};0\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=2x^4+x^3+x^2$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 7. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-1$. Số giao điểm của (C) và d là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+2}$ và trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 9. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-3x+2)$ và trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 10. Giao điểm giữa đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ và đường thẳng $(d): y=x+1$ là

A. $A(2;-1)$. **B.** $A(0;-1)$. **C.** $A(-1;2)$. **D.** $A(-1;0)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^4-4x^2-2$ có đồ thị (C) và đồ thị (P): $y=1-x^2$. Số giao điểm của (P) và đồ thị (C) là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x-3$. Số giao điểm của (C) và d là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 13. Tọa độ giao điểm giữa đồ thị $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ và đường thẳng $d: y=x-2$ là

A. $A(-1;-3);\ B(3;1)$. **B.** $A(1;-1);\ B(0;-2)$.

C. $A(-1;-3);\ B(0;-2)$. **D.** $A(1;-1);\ B(3;1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y=2x-3$. Đường thằng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $x_I=\dfrac{4}{3}$. **B.** $x_I=-\dfrac{3}{4}$. **C.** $x_I=\dfrac{3}{4}$. **D.** $x_I=-\dfrac{4}{3}$.

Câu 15. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN với M, N là giao điểm của đường thẳng $d: y=x+1$ và đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $I(-1;-2)$. **B.** $I(-1;2)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(1;2)$.

Câu 16. Gọi M, N là hai giao điểm của đường thẳng $d: y = x+1$ và $(C): y = \frac{2x+4}{x-1}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - x^2 + 2$ cắt đuờng thẳng $y = 6$ tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 18. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x+2}{x+1}$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = 2x^4 - x^2$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(1;1)$; $(-1;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt thì tất cả các giá trị tham số m thỏa mãn là

A. $m > 1$. **B.** $-3 \le m \le 1$. **C.** $-3 < m < 1$. **D.** $m < -3$.

Câu 20. Đường thẳng $y = m$ **không** cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$ thì tất cả các giá trị tham số m là

A. $m > 4$. **B.** $m \ge 4$.
C. $m \le 2$. **D.** $2 < m < 4$.

Câu 21. Với tất cả giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 = m + 3$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. $m \in (-4; -3)$. **B** $m = -3$ hoặc $m = -4$.
C. $m \in (-3; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -4)$.

Câu 22. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $-1 < m < 3$. **B.** $-1 \le m \le 3$.
C. $m = 1$. **D.** $m < -1$ hoặc $m > 3$.

Câu 23. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-2 < m < 0$. **B.** $-2 < m < 2$.
C. $0 < m < 1$. **D.** $1 < m < 2$.

Câu 24. Tất cả giá trị của tham số m để đồ th ị $(C): y = x^4 - 2x^2 - 3$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại bốn điểm phân biệt là

A. $-4 < m < -3$. **B.** $m < -4$.
C. $m > -3$. **D.** $-4 < m < -\frac{7}{2}$.

Câu 25. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. $-6 \le m \le -2$. **B.** $2 < m < 6$. **C.** $-6 < m < -2$. **D.** $2 \le m \le 6$.

Câu 26. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $1 < m < \frac{13}{4}$. **B.** $0 < m < \frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{9}{4} < m < 0$. **D.** $-1 < m < \frac{13}{4}$.

Câu 27. Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+m$. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt là

A. $0<m<1$. **B.** $-1<m\le 0$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $-1\le m<0$.

Câu 28. Cho hàm số $y=(x-2)\left(x^2+mx+m^2-3\right)$. Tất cả giá trị của thma số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $-2<m<-1$. **B.** $\begin{cases}-2<m<2\\ m\ne -1\end{cases}$. **C.** $-1<m<2$. **D.** $\begin{cases}-1<m<2\\ m\ne 1\end{cases}$.

Câu 29. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2x^2-m+3=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $2<m<3$. **B.** $2\le m\le 3$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m>2$.

Câu 30. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2x^2-m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $m>3$. **B.** $m\ge 3$.

C. $m>3$ hoặc $m=2$. **D.** $m=3$ hoặc $m=2$.

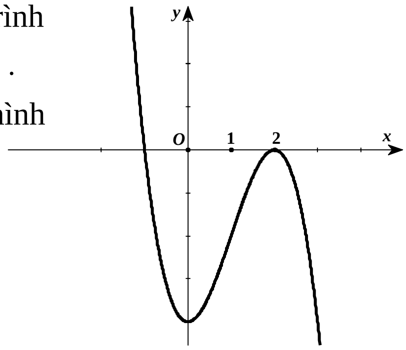
Câu 31. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=-2x^4+2x^2+1$ cắt đường thẳng $y=3m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $\frac{1}{3}\le m\le\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m\le\frac{1}{3}$. **D.** $m=\frac{1}{3}$.

Câu 32. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C): $y=-2x^3+3x^2+2m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $\frac{1}{4}\le m<\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $0\le m\le\frac{1}{2}$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+4+m=0$ có nghiệm duy nhất lớn hơn 2. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ là hình bên.



A. $m>0$.

B. $m\le -4$.

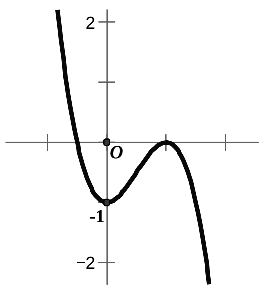
C. $m<-4$.

D. $m\le -4$ hoặc $m\ge 0$.

Câu 34. Tất cả giá trị của thm số m để phương trình $x^3-3x-m+1=0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm dương là

A. $-1\le m\le 1$. **B.** $-1<m\le 1$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 35. Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2-1$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Dùng đồ thị (C) suy ra tất cả giá trị tham số m để phương trình $2x^3-3x^2+2m=0\,(1)$ có ba nghiệm phân biệt là



A. $0<m<\frac{1}{2}$. **B.** $-1<m<0$.

C. $0\le m\le -1$. **D.** $-1\le m\le 0$.

Câu 36. Cho phương trình $x^3-3x^2+1-m=0$ (1). Điều kiện của tham số m để (1) có ba nghiệm phân biệt thỏa $x_1<1<x_2<x_3$ khi

A. $m=-1$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $-3<m<-1$. **D.** $-3\le m\le -1$.

Câu 37. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - 1$. Giao điểm của (C) và d lần lượt là $A(1;0)$, B và C. Khi đó khoảng cách giữa B và C là

A. $BC = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$.
B. $BC = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.
C. $BC = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
D. $BC = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Khoảng cách giữa A và B là

A. $AB = \dfrac{2}{5}$.
B. $AB = \dfrac{5}{2}$.
C. $AB = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
D. $AB = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y = 2x - m$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B khi giá trị của tham số m thỏa

A. $-4 - 2\sqrt{6} \le m \le -4 + 2\sqrt{6}$.
B. $m \le -4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m \ge -4 + 2\sqrt{6}$.
C. $-4 - 2\sqrt{6} < m < -4 + 2\sqrt{6}$.
D. $m < -4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m > -4 + 2\sqrt{6}$.

Câu 40. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = x + m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt là

A. $(-2;2)$.
B. $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.
C. $\mathbb{R}$.
D. $\varnothing$

Câu 41. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m^2$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 4x$ tại ba điểm phân biệt là

A. $(-1;1)$.
B. $(-\infty;1]$.
C. $\mathbb{R}$.
D. $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 42. Tất cả giá trị tham số m để đồ thị $(C): y = x^4$ cắt đồ thị $(P): y = (3m+4)x^2 - m^2$ tại bốn điểm phân biệt là

A. $m \in (-\infty;-4) \cup \left(-\dfrac{5}{4};0\right) \cup (0;+\infty)$.
B. $m \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$.
C. $m \in \left(-\dfrac{4}{5};0\right) \cup (0;+\infty)$.
D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 43. Cho đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 1$. Gọi d là đường thẳng qua $A(0;-1)$ có hệ số góc bằng k. Tất cả giá trị k để (C) cắt d tại ba điểm phân biệt là

A. $\begin{cases} k < \dfrac{9}{8} \\ k \ne 0 \end{cases}$.
B. $\begin{cases} k > -\dfrac{9}{8} \\ k \ne 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} k < -\dfrac{9}{8} \\ k \ne 0 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} k > \dfrac{9}{8} \\ k \ne 0 \end{cases}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2)$ với hệ số góc k. Tập tất cả các giá trị của k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $\{0\}$.
B. $\mathbb{R}$.
C. $\{-3\}$.
D. $(-3;+\infty)$.

Câu 45. Với những giá trị nào của tham số m thì $(C_m): y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2+4m+1)x - 4m(m+1)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1?

A. $\frac{1}{2} < m \neq 1$. **B.** $m > \frac{1}{2}$. **C.** $m \geq \frac{1}{2}$. **D.** $m \neq 1$.

Câu 46. Cho đồ thị $(C): y = 4x^3 - 3x + 1$ và đường thẳng $d: y = m(x-1) + 2$. Tất cả giá trị tham số m để (C) cắt d tại một điểm là

A. $m = 9$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \leq 0$ hoặc $m = 9$. **D.** $m < 0$.

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

A. $m = 0$ hoặc $m = 6$. **B.** $m = 0$.
C. $m = 6$. **D.** $0 \leq m \leq 6$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và $d: y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

A. Không tồn tại. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = 3$.

Câu 49. Cho $(P): y = x^2 - 2x - m^2$ và $d: y = 2x + 1$. Giả sử (P) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B thì tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I(2; -m^2)$. **B.** $I(1; -m^2 - 1)$. **C.** $I(1;3)$. **D.** $I(2;5)$.

Câu 50. Giá trị nào của tham số m để đồ thị $(C_m): y = (m-1)x^3 + x^2 - m$ chỉ có một điểm chung với trục hoành?

A. $m = 1$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.
C. $m < 0$. **D.** $m > \frac{4}{3}$.

Câu 51. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m - 1$ có đồ thị (C). Giá trị của tham số m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập thành cấp số cộng là

A. $m = 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = \pm 6$.

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B. Với $C(-2;5)$, giá trị của tham số m để tam giác ABC đều là

A. $m = 1$. **B.** $m = 1$ hoặc $m = 5$.
C. $m = 5$. **D.** $m = -5$.

Câu 53. Cho hàm số $y = x^4 - (2m-1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ lớn hơn 3 là

A. $m \neq \frac{3}{2}$. **B.** $1 < m < \frac{11}{2}$. **C.** $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < \frac{11}{2} \end{cases}$.

Câu 54. Cho hàm số: $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng $d: y = -x + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;-2)$, B và C. Với $M(3;1)$, giá trị của tham số m để tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ là

A. $m = -1$.
B. $m = -1$ hoặc $m = 4$.
C. $m = 4$.
D. Không tồn tại m.

Câu 55. Cho đồ thị (C_m): $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tất cả giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ là

A. $m = 1$.
B. $m \neq 0$.
C. $m = 2$.
D. $m > -\dfrac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Câu 56. Cho hàm số $: y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \dfrac{2}{3}$ có đồ thị (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$ là

A. $m > 1$ hoặc $m < -1$.
B. $m < -1$.
C. $m > 0$.
D. $m > 1$.

Câu 57. Cho đồ thị $(C): y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị tham số m để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$ là

A. $m = 1 + \sqrt{6}$.
B. $m = 1 - \sqrt{6}$ hoặc $m = 1 + \sqrt{6}$.
C. $m = 1 - \sqrt{6}$.
D. $m < 1$ hoặc $m > 3$.

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	A	B	A	C	B	B	B	A	C	D	C	C	D	A	C	B	D	D	C

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57			
D	C	B	D	A	D	A	A	D	B	C	B	D	B	A	A	B			

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.
Vậy số giao điểm là 2 .

Câu 2. **Chọn B.**

Giải phương trình $(x+3)(x^2+3x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$. Vậy số giao điểm là 3 .

Câu 3. **Chọn B.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Vậy có một giao điểm duy nhất.

Câu 4. **Chọn C.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{x+1}=x-1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

Thế vào phương trình $y=x-1$ được tung độ tương ứng $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$.

Vậy chọn $(0;-1)$, $(2;1)$.

Câu 5. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x+1}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Thế vào phương trình $2x-3$ được tung độ tương ứng: $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-4 \end{array}\right.$.

Vậy chọn $(2;1)$ và $\left(-\frac{1}{2};-4\right)$.

Câu 6. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^4+x^3+x^2=0 \Leftrightarrow x^2(2x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2+x+1=0 (VN) \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 7. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 3.

Câu 8. Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2-4x+3}{x+2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm là 2 .

Câu 9. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm $(x-1)(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm là 2 .

Câu 10. **Chọn D.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2-2x-3}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=0$.

Vậy chọn $(-1;0)$.

Câu 11. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4-4x^2-2=-x^2+1 \Leftrightarrow x^4-3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}} \vee x=-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}} \\ x^2=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}<0 \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 2.

Câu 12. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm là 2.

Câu 13. **Chọn A.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x+2}=x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$.

Vậy chọn $A(-1;-3), B(3;1)$.

Câu 14. Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3}{4}.$$

Câu 15. **Chọn D.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+2}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=4 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right. \Rightarrow I(1;2)$.

Vậy chọn $I(1;2)$.

Câu 16. **Chọn B.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x+4}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{6} \\ x=1-\sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow x_I=1.$$

Câu 17. **Chọn A.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^4-x^2+2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \\ x^2=\dfrac{1-\sqrt{33}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{4}} \vee x=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{4}}.$$

Vậy số giao điểm là 2.

Câu 18. **Chọn A.**

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C') là $y=1$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^4-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow y=1.$$

Vậy chọn $(1;1)$, $(-1;1)$.

Câu 19. **Chọn C.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 1 = m$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, đồ thị cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-3 < m < 1$.

Vậy chọn $-3 < m < 1$.

Câu 20. **Chọn A.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^4 + 4x^2 + 2 = m$

Ta có: $y' = -8x^3 + 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Do đó, đường thẳng $y = m$ **không** cắt đồ thị hàm số khi $m > 4$.

Vậy chọn $m > 4$.

Câu 21. **Chọn A.**

Ta khảo sát hàm số (C): $y = x^4 - 2x^2$ tìm được $y_{CT} = -1$, $y_{C\text{Đ}} = 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < m + 3 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -3$.

Vậy chọn $m \in (-4;-3)$.

Câu 22. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận:

Ta khảo sát hàm số (C): $y = x^3 - 3x + 1$ tìm được $y_{C\text{Đ}} = 3$, $y_{CT} = -1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < m < 3$. Vậy chọn $-1 < m < 3$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra trực tiếp đáp án

+Với $m = 2$, giải phương trình $x^3 - 3x - 1 = 0$ ta bấm máy được ba nghiệm $\Rightarrow$ loại C, **D.**

+Với $m = -1$, giải phương trình $x^3 - 3x + 2 = 0$ ta bấm máy được hai nghiệm $\Rightarrow$ loại **B.**

Vậy chọn $-1 < m < 3$

Câu 23. **Chọn B.**

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Đường thẳng $d: y = m$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi: $-2 < m < 2$.

Vậy chọn $-2 < m < 2$.

Câu 24. **Chọn A.**

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Đường thẳng $d: y = m$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt khi $-4 < m < -3$.

Vậy chọn $-4 < m < -3$

Câu 25. **Chọn C.**

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$

Tính $y' = 4x^3 - 8x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -6 \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -6 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-6	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-6 < m < -2$.

Vậy chọn $-6 < m < -2$.

Câu 26. **Chọn B.**

Phương trình $\Leftrightarrow m = -x^4 + 3x^2$. Đặt $(C): y = -x^4 + 3x^2$ và $d: y = m$

Xét hàm số $y = -x^4 + 3x^2$. Ta có $y' = -4x^3 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow d$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$.

Vậy chọn $0 < m < \frac{9}{4}$.

Câu 27. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4 + 2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - 2x^2$.

Đặt $(C): y = x^4 - 2x^2$ và $d: y = m$

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt khi $-1 < m \le 0$.
Vậy chọn $-1 < m \le 0$.

Câu 28. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + mx + m^2 - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 + 2m + m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$. Vậy chọn $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Câu 29. **Chọn A.**

Tương tự ta khảo sát hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 3$ ta tìm được $y_{CT} = 2, y_{CD} = 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2 < m < 3$. Vậy chọn $2 < m < 3$.

Câu 30. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận:

Tương tự ta khảo sát hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 3$ ta tìm được $y_{CT} = 2, y_{CD} = 3$.

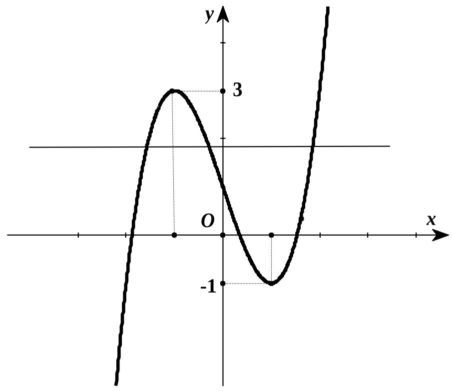
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 2 \vee m > 3$. Vậy chọn $m = 2 \vee m > 3$.

Phương pháp trắc nghiệm:

+Với $m = 3$, ta giải phương trình $x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \Rightarrow$ loại B, **D.**

+Với $m = 2$, ta giải phương trình $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \Rightarrow$ loại **A.**

Câu 31. Chọn D.



Phương pháp tự luận:

Khảo sát hàm số $(C): y = -2x^4 + 2x^2 + 1$ tìm được $y_{CT} = 1, y_{C\S} = \frac{3}{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$. Vậy chọn $m = \frac{1}{3}$.

Phương pháp trắc nghiệm:

+ Với $m = \frac{1}{2}$, ta giải phương trình $-2x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ loại B, A.

+ Với $m = 0$, ta giải phương trình

$$-2x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{loại C.}$$

Vậy chọn $m = \frac{1}{3}$.

Câu 32. Chọn C.

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox: $-2x^3 + 3x^2 + 2m - 1 = 0$. Ta khảo sát hàm số $(C'): y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ và cũng chỉ là tìm y_{CD}, y_{CT}. Cụ thể $y_{CD} = 1, y_{CT} = 0$. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < 2m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$. Vậy chọn $0 < m < \frac{1}{2}$

Phương pháp trắc nghiệm:

+ Với $m = 0$, ta có phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ loại B, D.

+ Với $m = 0.1$, ta có phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 0.8 = 0$ có 3 nghiệm $\Rightarrow$ loại C.

Câu 33. Chọn C.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0\ (*)$. Xem phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và đường thẳng $d: y = m$. Số giao điểm của (C) và d là số nghiệm của (*). Dựa vào đồ thị hàm số, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -4$. Vậy chọn $m < -4$.

Câu 34. Chọn D.

Phương pháp tự luận:

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ như hình bên.

Dựa vào đồ thị ta tìm được kết quả để đồ thị cắt hàm số tại ba điểm phân biệt là $-1 < m < 3$.

Với $x=0 \Rightarrow y=1$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1<m<1$. Vậy chọn $-1<m<1$.

Phương pháp trắc nghiệm: Xét $m=1$, ta được phương trình $x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

không đủ hai nghiệm dương $\Rightarrow$ loại A, B, C. Vậy chọn $-1<m<1$.

Câu 35. **Chọn A.**

Phương trình $(1) \Leftrightarrow -2x^3+3x^2-1=2m-1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và $d: y=2m-1$ (là đường thẳng song song hoặc trùng với Ox).

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (C)$ cắt d tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -1<2m-1<0$ $\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$. Vậy chọn $0<m<\frac{1}{2}$.

Câu 36. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Ta có $x^3-3x^2+1-m=0$ là phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ và $y=m$ (là đường thẳng song song hoặc trùng với Ox).

Xét $y=x^3-3x^2+1$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

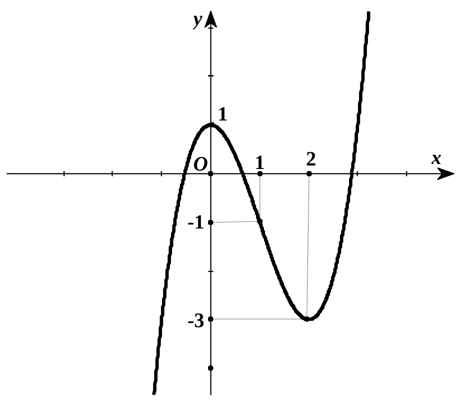
Tính $y'=3x^2-6x$.

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$.

Ta có $x=1 \Rightarrow y=-1$

Dựa vào đồ thị, số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=x^3-3x^2+1$ và đường thẳng $y=m$.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<-1$.



Phương pháp trắc nghiệm

Chọn $m=2$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính. Ta nhận thấy (1) chỉ có một nghiệm. Suy ra loại được đáp án B.

Tiếp tục thử $m=-1$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính. Ta nhận thấy (1) có ba nghiệm nhưng có một nghiệm bằng 1. Suy ra loại A.

Tiếp tục thử $m=-2$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính. Ta nhận thấy (1) có ba nghiệm thỏa yêu cầu bài toán. Suy ra loại D.

Vậy C là đáp án cần tìm.

Câu 37. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2-x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2-x-2=0 \ (1) \end{array}\right.$$

Khi đó ta có $A(1;0)$, $B(x_1;x_1-1)$ và $C(x_2;x_2-1)$ (x_1, x_2 là nghiệm của (1))

Ta có $BC=(x_2-x_1;x_2-x_1)$, suy ra

$$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2\left(\frac{1}{4}+4\right)}=\frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Vậy **Chọn B.**

Phương pháp trắc nghiệm

Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3-3x^2+1=x-1\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-x+2=0.$$

- Nhập máy tính tìm nghiệm phương trình bậc ba.
- Gán hai nghiệm khác 1 vào B và C.
- Nhập máy $X-1$. Dùng lệnh CALC tìm tung độ của điểm B và C gán vào hai biến D và E.

Khi đó $BC=\sqrt{(C-B)^2+(E-D)^2}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Vậy **Chọn B.**

Câu 38. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\2x^2-3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=1\quad\Rightarrow A(2;1)\\x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-4\quad\Rightarrow B\left(-\frac{1}{2};-4\right)\end{array}\right.$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{5}{2};-5\right)$. Suy ra $AB=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. Vậy chọn $AB=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Phương pháp trắc nghiệm

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=2x-3\ (x\neq-1)$.

Dùng lệnh CALC của máy tính, ta tìm được hai nghiệm của phương trình lần lượt là $x=2$ và $x=-\dfrac{1}{2}$. Suy ra $A(2;1)$ và $B\left(-\dfrac{1}{2};-4\right)$. Dùng máy tính thu được $AB=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Vậy chọn $AB=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Câu 39. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-m\ (x\neq-1)\Leftrightarrow 2x^2-mx+1-m=0\ \ (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-8(1-m)>0\\2+m+1-m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<-4-2\sqrt{6}\vee m>-4+2\sqrt{6}.$$

Vậy chọn $m<-4-2\sqrt{6}$ hoặc $m>-4+2\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-m\ (x\neq-1)\Leftrightarrow 2x^2-mx+1-m=0\ \ (1)$$

Chọn $m=0$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính, ta nhận thấy (1) vô nghiệm. Suy ra loại được A và C.

Tiếp tục chọn $m=-4+2\sqrt{6}$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính, ta nhận thấy (1) có nghiệm kép. Suy ra loại B.

Vậy chọn $m<-4-2\sqrt{6}$ hoặc $m>-4+2\sqrt{6}$.

Câu 40. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d :

$$\frac{x}{x-1}=x+m \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-m=0 \qquad (1)$$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m^2+4>0$ (đúng với mọi m).

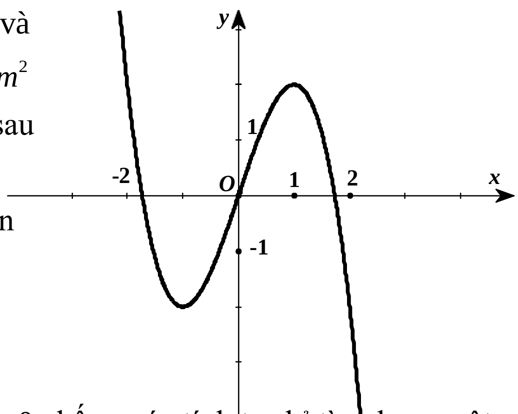
Vậy chọn □ .

Câu 41. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $d: -x^3+4x=x+m^2 \Leftrightarrow -x^3+3x=m^2$

Ta khảo sát hàm số $(C): y=-x^3+3x$ có đồ thị sau như hình bên.



Tìm được $y_{CT}=-2,\ y_{C§}=2$ nên yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow -2<m^2<2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Vậy chọn $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Phương pháp trắc nghiệm:

+ Với $m=-3$, ta có phương trình $-x^3+3x-9=0$, bấm máy tính ta chỉ tìm được một nghiệm $\Rightarrow$ loại B, C.

+ Với $m=1.4$, ta có phương trình $-x^3+3x-1,4^2=0$, bấm máy tính ta ra được ba nghiệm $\Rightarrow$ loại A.

Vậy chọn $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Câu 42. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$x^4=(3m+4)x^2-m^2 \Leftrightarrow x^4-(3m+4)x^2+m^2=0\ (1).$$

(C) cắt (P) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5m^2+24m+16>0\\ m^2>0\\ 3m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<-4 \vee m>-\frac{4}{5}\\ m\neq 0\\ m>-\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-\frac{4}{5}\\ m\neq 0\end{cases}.$$

Vậy chọn $\begin{cases}m>-\frac{4}{5}\\ m\neq 0\end{cases}$.

Câu 43. **Chọn B.**

Phương trình đường thẳng $d: y = kx - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$2x^3 - 3x^2 - 1 = kx - 1 \Leftrightarrow x\left(2x^2 - 3x - k\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3x - k & (2) \end{array}\right.$$

(C) cắt d tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 0 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{9}{8} \\ k \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy chọn $\begin{cases} k > -\dfrac{9}{8} \\ k \neq 0 \end{cases}$.

Câu 44. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận:

Phương trình $d: y = k(x-1) + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + k + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 2x - k - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \underbrace{x^2 - 2x - k - 2}_{g(x)} = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 > 0 \\ -3 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > -3$$

Hơn nữa theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k + 4 = 4 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm AB.

Vậy chọn $k > -3$, hay $(-3; +\infty)$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Ta tính toán đến phương trình (1)

+ Với $k = -2$, ta giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ thu được $x_1 = 2, x_2 = 0, x_I = 1$.

+ Hơn nữa $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = 4 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm $AB \Rightarrow$ loại A, C từ đó ta loại được **B.**

Vậy chọn $k > -3$.

Câu 45. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục Ox:

$$x^3 - 3(m+1)x^2 + 2\left(m^2 + 4m + 1\right)x - 4m(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + 2m\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + 2m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2m \\ x = m + 1 \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 2m \neq 2 \\ 1 < m+1 \neq 2 \\ 2m \neq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < m \neq 1 \\ 0 < m \neq 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \neq 1.$

Vậy chọn $\frac{1}{2} < m \neq 1.$

Câu 46. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và d là $4x^3 - 3x + 1 = m(x-1) + 2$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - (m+3)x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 4x^2 + 4x - m + 1 = 0 \ (1) \end{array}\right.$$

(C) cắt d tại một điểm $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm hay phương trình (1) có nghiệm kép bằng 1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' < 0 \\ \begin{cases} \Delta' = 0 \\ 4 + 4 - m + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m < 0 \\ \begin{cases} 4m = 0 \\ m = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy chọn $m < 0$.

Câu 47. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x+1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + m - 1 = 0 \ \ (1) \end{cases}$$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \\ (-1)^2 - (m-1) + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 \vee m > 5 \quad (*)$

Khi đó ta lại có

$$A(x_1; x_1 + m),\ B(x_2; x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}\left|x_2 - x_1\right|$$

và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$. Từ đây ta có

$$AB = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|x_2 - x_1\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m-1) = 5 \Leftrightarrow m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right. \text{(thỏa (*))}$$

Vậy chọn $m = 0 \vee m = 6$.

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn $m = 0$ thay vào d. Ta được $\frac{2x+1}{x+1} = x \quad (x \neq -1)$.

Dùng lệnh SHIFT CALC tìm được $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}) \Rightarrow AB = \sqrt{10}$.

Nhận thấy $m=0$ thỏa yêu cầu.
Tượng tự chọn $m=6$ kiểm tra tương tự $m=0$ nhận thấy $m=6$ thỏa yêu cầu bài toán.
Vậy chọn $m=0 \vee m=6$.

Câu 48. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x+1}{x+1}=x+m\ (x\neq -1)\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-1=0\ \ (1)$$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A , B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2-4(m-1)>0\\ 1^2-(m-1)+m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<1\vee m>5\\ 1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<1\vee m>5$$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1) (nên ta có $x_1+x_2=1-m$). Suy ra hệ số góc của các tiếp tuyến tại điểm A và B lần lượt là $k_A=\dfrac{1}{(x_1+1)^2}$

và $k_B=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$

Vì tiếp tuyến tại A và B song song, đồng thời $x_1\neq x_2$ nên phải có $\dfrac{1}{(x_1+1)^2}=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$, suy ra

$$x_1+1=-x_2-1\Leftrightarrow x_1+x_2+2=0\Leftrightarrow 1-m+2=0\Leftrightarrow m=3\ (l)\ .$$

Vậy chọn không tồn tại.

Câu 49. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d :

$$x^2-2x-m^2=2x+1\Leftrightarrow x^2-4x-m^2-1=0\ (1)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0$$
$$\Leftrightarrow m^2+5>0 \text{ (đúng với mọi } m\text{)}$$

Hoành độ của điểm A, B là nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) và tung độ trung điểm I thỏa phương trình d , nên tọa độ trung điểm I là $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2\\ y_I=2x_I+1=5\end{cases}$.

Vậy chọn $I(2;5)$.

Câu 50. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận: Xét $m=1$, phương trình $x^2-1=0$ có hai nghiệm (loại).
Khi $m\neq 1$ ta thấy đồ thị hàm luôn có có hai điểm cực trị. Vậy ta tìm giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số như sau:

$$y'=3(m-1)x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-m\\ x=\dfrac{-2}{3(m-1)}\Rightarrow y=\dfrac{-27m^3+54m^2-27m+4}{27(m-1)^2}\end{array}\right.$$

(C_m) có 1 điểm chung với $Ox \Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m\left(27m^3-54m^2+27m-4\right)}{27(m-1)^2} > 0.$

$$\Leftrightarrow m < 0 \vee m > \frac{4}{3}.$$

Vậy chọn $m < 0 \vee m > \dfrac{4}{3}$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra trực tiếp các đáp án của đề bài

+ Với $m=-1$, phương trình $-2x^3+x^2+1=0$ thu được $x=1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ loại A, D.

+ Với $m=2$, phương trình $x^3+x^2-2=0$ thu được $x=1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ loại C.

Vậy chọn $m < 0 \vee m > \dfrac{4}{3}$.

Câu 51. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm phân biệt tạo thành cấp số cộng khi và chỉ khi phương trình $x^3-3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp cố cộng.

Suy ra đường thẳng $y=m$ đi qua điểm uốn của đồ thị $y=x^3-3x^2-1$ (do đồ thị (C) nhận điểm uốn làm tâm đối xứng). Mà điểm uốn của $y=x^3-3x^2-1$ là $I(1;-3)$. Suy ra $m=-3$. Vậy chọn $m=-3$.

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn $m=-3$ thay vào phương trình $x^3-3x^2-m-1=0$.

Ta được $x^3-3x^2+2=0$. Dùng chức năng tìm nghiệm phương trình bậc ba ta được ba nghiệm $x=1-\sqrt{3}, x=1, x=1+\sqrt{3}$ thỏa cấp số cộng.

Vậy chọn $m=-3$.

Câu 52. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$\frac{2x+1}{x-1} = x+m \ (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2+(m-3)x-m-1=0 \ (1)$$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases}(m-3)^2+4(m+1)>0\\ 1^2+(m-3)-m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+13>0\\ -1\neq 0\end{cases}$ đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $A(x_1; x_1+m), B(x_2; x_2+m)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1), theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=3-m\\ x_1x_2=-m-1\end{cases}.$$

Gọi $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{x_1+x_2+2m}{2}\right)$ là trung điểm của AB, suy ra $I\left(\dfrac{3-m}{2}; \dfrac{3+m}{2}\right)$, nên

$$\overrightarrow{CI}\left(-2-\frac{3-m}{2}; 5-\frac{3+m}{2}\right) \Rightarrow CI = \frac{1}{2}\sqrt{(m-7)^2+(7-m)^2}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; x_2-x_1) \Rightarrow AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(m^2-2m+13)}$. Vậy tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$CI=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{2(m-7)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2(m^2-2m+13)}$$

$$\Leftrightarrow(m-7)^2=3(m^2-2m+13)\Leftrightarrow 2m^2+8m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right..$$

Vậy chọn $m=1\vee m=-5$.

Câu 53. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$x^4-(2m-1)x^2+2m=2\Leftrightarrow x^4-(2m-1)x^2+2m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2m-2\ (1)\end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3.

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m-2\neq 1\\0<2m-2<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\frac{3}{2}\\1<m<\frac{11}{2}\end{cases}$. Vậy chọn $\begin{cases}m\neq\frac{3}{2}\\1<m<\frac{11}{2}\end{cases}$.

Câu 54. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3+2mx^2+3(m-1)x+2=-x+2\Leftrightarrow x\left(x^2+2mx+3(m-1)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+3(m-1)=0(1)\end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+3>0\\m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 1$.

Khi đó ta có: $C(x_1;-x_1+2),\ B(x_2;-x_2+2)$ trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (1), nên theo Viet thì $\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\x_1x_2=3m-3\end{cases}$. Vậy

$$\overrightarrow{CB}=(x_2-x_1;-x_2+x_1)\Rightarrow CB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{8(m^2-3m+3)}$$

$$d(M;(d))=\frac{|-3-1+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{7}$ khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2}\sqrt{8(m^2-3m+3)}.\sqrt{2}=2\sqrt{7}\Leftrightarrow m^2-3m+3=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=4\end{array}\right.\ (\text{thỏa } m\neq 1)$$

Vậy chọn $m=-1\vee m=4$.

Câu 55. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là $x^3-2x^2+(1-m)x+m=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x^2-x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-x-m=0\ (1)\end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ 1-1-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+4m>0\\ m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-\dfrac{1}{4}\\ m\neq 0\end{cases} (*)$$

Gọi $x_3=1$ còn x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1) nên theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=-m\end{cases}$. Vậy

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=4 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+1=4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-3=0 \Leftrightarrow m=1 \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy chọn $m=1$.

Câu 56. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(-3m+1)x-3m-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \underbrace{x^2+(-3m+1)x-3m-2}_{g(x)}=0 \ (1)\end{array}\right.$$

(C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_g>0\\ g(1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9m^2+6m+9>0\\ -6m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0.$$

Gọi $x_1=1$ còn x_2, x_3 là nghiệm phương trình (1) nên theo Viet ta có $\begin{cases}x_2+x_3=3m-1\\ x_2x_3=-3m-2\end{cases}$.

Vậy

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2>15 \Leftrightarrow 1+(x_2+x_3)^2-2x_2x_3>15$$

$$\Leftrightarrow (3m-1)^2+2(3m+2)-14>0 \Leftrightarrow 9m^2-9>0 \Leftrightarrow m>1 \vee m<-1$$

Vậy chọn $m>1 \vee m<-1$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra ngay trên đáp án

+ Với $m=-2$, ta giải phương trình bậc ba: $\frac{1}{3}x^3+2x^2-x-\frac{4}{3}=0$ thu được 3 nghiệm

$x_1=-6.37..., x_2=1, x_3=-0.62...$ Ta chọn những giá trị nhỏ hơn các nghiệm này và kiểm tra điều kiện của bài toán.

Cụ thể ta tính $(-6.4)^2+1^2+(-0.63)^2=42.3569>15 \Rightarrow$ loại C, D.

+ Với $m=2$, ta làm tương tự thu được 3 nghiệm $x_1=6.27..., x_2=1, x_3=-1.27...$

Tính $6.2^2+1^2+(-1.3)^2=41.13>15 \Rightarrow$ loại B.

Vậy chọn $m>1 \vee m<-1$.

Câu 57. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và d là $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x^2-(m+1)x+m+1=0 \ (1)\end{cases}$$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)(m-3) > 0 \\ 1 - m - 1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 3 \ (*)$$

Hoành độ giao điểm x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = m+1 \end{cases}$. Khi đó: $A(x_1; m)$, $B(x_2; m)$, suy ra

$$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 = 2+\sqrt{6} \\ m+1 = 2-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1+\sqrt{6} \\ m = 1-\sqrt{6} \end{array}\right. \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy chọn $m = 1+\sqrt{6} \vee m = 1-\sqrt{6}$.

CHỦ ĐỀ 2.2. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C).

1. **Tiếp tuyến** của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Trong đó:

- Điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ được gọi là ***tiếp điểm***. (với $y_0 = f(x_0)$**).**
- $k = f'(x_0)$ là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

Lưu ý:

- Tiếp tuyến của (C) ***<u>hoàn toàn xác định</u>*** nếu biết *hệ số góc* của tiếp tuyến ***hoặc*** *hoành độ tiếp điểm*.
- *Đường thẳng bất kỳ* đi qua $M_0(x_0; y_0)$ có hệ số góc k, có phương trình

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

- Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : y = k_1 x + m_1$ và $\Delta_2 : y = k_2 x + m_2$.

Lúc đó: $\boxed{\Delta_1 \,/\!/\, \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \text{ và } m_1 \neq m_2 \quad ; \quad \Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1}$

2. **<u>Điều kiện tiếp xúc</u>**: Cho hai hàm số $y = f(x), (C)$ và $y = g(x), (C')$.

(C) và (C') tiếp xúc nhau *khi chỉ khi* hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$ có nghiệm.

<u>Đặc biệt:</u> Đường thẳng $y = kx + m$ là tiếp tuyến với $(C) : y = f(x)$ khi chỉ khi hệ

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases}$$ có nghiệm.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Bài toán 1: Các dạng phương trình tiếp tuyến thường gặp.

Cho hàm số $y = f(x)$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

$\boxed{\text{Dạng 1.}}$ **Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại $M(x_o; y_o)$.**

❖ **<u>Phương pháp</u>**

- **Bước 1.** Tính $y' = f'(x)$ suy ra hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.
- **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Chú ý:

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0.

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C).

Sử dụng máy tính:

Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng $d: y = ax + b$.

- **Bước 1:** Tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$. Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x=x_0}}$ bằng cách nhấn $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$ sau đó nhấn $\boxed{=}$ ta được a.
- **Bước 2:** Sau đó nhân với $\boxed{-X}$ tiếp tục nhấn phím + $\boxed{f(x)}$ $\boxed{CALC}$ $X = x_o$ nhấn phím $\boxed{=}$ ta được b.

❖ __Ví dụ minh họa__

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 4)$ là

A. $y = -9x + 5$. **B.** $y = 9x + 5$. **C.** $y = -9x - 5$. **D.** $y = 9x - 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow k = y'(1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến tại $M(1; 4)$ là

$d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 9(x-1) + 4 = 9x - 5$. Chọn đáp án **D.**

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\frac{d}{dx}\left(X^3 + 3X^2\right)_{x=1}$ nhấn dấu = ta được 9.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu + $\boxed{X^3 + 3X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X = 1$ = ta được -5.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9x - 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

A. $y = -18x + 49$. **B.** $y = -18x - 49$. **C.** $y = 18x + 49$. **D.** $y = 18x - 49$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = -6x^2 + 12x$. Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -5 \Rightarrow M(3; -5)$ và hệ số góc $k = y'(3) = -18$. Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -18(x-3) - 5 = -18x + 49$. Chọn đáp án **A.**

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(-2X^3 + 6X^2 - 5\right)\Big|_{x=3}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -18.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{-2X^3 + 6X^2 - 5}$ $\boxed{CALC}$ $X = 3$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 49. Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -18x + 49$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 > 0$, biết $y'(x_0) = -1$ là

A. $y=-3x-2$. **B.** $y=-3x+1$. **C.** $y=-3x+\frac{5}{4}$. **D.** $y=-3x+\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=x^3-4x$, $y'=3x^2-4$. Mà

$$y'(x_0)=-1\Rightarrow 3x_0^2-4=-1\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=1 \text{ (vì } x_0>0\text{)}.$$

Vậy $y_0=-\frac{7}{4}$, suy ra $k=y'(1)=-3$. Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là

$$d: y=-3(x-1)-\frac{7}{4}\Rightarrow y=-3x+\frac{5}{4}.$$ Chọn đáp án **C.**

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4-2X^2\right)\Big|_{x=1}$ nhấn dấu = ta được -3.
- Sau đó nhân với $(\boxed{-X})$ nhấn dấu + $\boxed{\frac{1}{4}X^4-2X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X=1$ $\boxed{=}$ ta được $\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y=-3x+\frac{5}{4}$.

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ có hệ số góc k cho trước.

❖ **Phương pháp**

- **Bước 1.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm và tính $y'=f'(x)$.
- **Bước 2.** Hệ số góc tiếp tuyến là $k=f'(x_0)$. Giải phương trình này tìm được x_0, thay vào hàm số được y_0.
- **Bước 3.** Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng

$$d: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Chú ý: Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

- Tiếp tuyến $d\,//\,\Delta: y=ax+b\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=a$.
- Tiếp tuyến $d\perp\Delta: y=ax+b,\ (a\neq 0)\Leftrightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\frac{1}{a}$.
- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc của tiếp tuyến d là $k=\pm\tan\alpha$.

Sử dụng máy tính:

Nhập $k(-X)+f(x)$ $\boxed{CALC}$ $X=x_0$ nhấn dấu $=\boxed{\text{ta}}$ được b. Phương trình tiếp tuyến là $d: y=kx+b$.

❖ **Ví dụ minh họa**

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y=x^3-3x+2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

A. $\left[\begin{array}{l}y=9x-14\\ y=9x+18\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=9x+15\\ y=9x-11\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}y=9x-1\\ y=9x+4\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}y=9x+8\\ y=9x+5\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3x^2-3$. Vậy $k=y'(x_0)=9\Leftrightarrow 3x_0^2-3=9\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=2\vee x_0=-2$. .

+ Với $x_0=2\Rightarrow y_0=4$ ta có tiếp điểm $M(2;4)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9(x-2)+4 \Rightarrow y = 9x-14$.

+ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$ ta có tiếp điểm $N(-2;0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại N là $y = 9(x+2)+0 \Rightarrow y = 9x+18$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x-14$ và $y = 9x+18$. Chọn đáp án **A.**

Sử dụng máy tính:

+ Với $x_0 = 2$ ta nhập $9(-X)+X^3-3X^2+2$ $\boxed{CALC}$ $X = 2$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được $-14 \Rightarrow y = 9x-14$.

+ Với $x_0 = -2$ ta nhập $9(-X)+X^3-3X^2+2$ $\boxed{CALC}$ $X = -2$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được $18 \Rightarrow y = 9x+18$.

điểm $A(x_A; y_A)$.

❖ **Phương pháp**

➢ **Cách 1.**

- **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A;y_A)$ hệ số góc k có dạng

$$d: y = k(x-x_A)+y_A \quad (*)$$

- **Bước 2:** d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x-x_A)+y_A \\ f'(x) = k \end{cases}.$$

- **Bước 3:** Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình $(*)$, ta được tiếp tuyến cần tìm.

➢ **Cách 2.**

- **Bước 1.** Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0) = f'(x_0)$ theo x_0.
- **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y = y'(x_0).(x-x_0)+y_0 \quad (**)$. Do điểm $A(x_A;y_A) \in d$ nên $y_A = y'(x_0).(x_A-x_0)+y_0$ giải phương trình này ta tìm được x_0.

- **Bước 3**. Thế x_0 vào (**) ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý: Đối với dạng viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm việc tính toán tương đối mất thời gian. Ta có thể sử dụng máy tính thay các đáp án: Cho $f(x)$ bằng kết quả các đáp án. Vào $MODE \to 5 \to 4$ nhập hệ số phương trình. *Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.*

❖ **Ví dụ minh họa**

$(C_2): y = g(x)$.

❖ **Phương pháp**

- **Bước 1.** Gọi d tiếp tuyến chung của $(C_1), (C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C_1) thì phương trình d có dạng $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$ $(***)$
- **Bước 2.** Dùng điều kiện tiếp xúc của d và (C_2), tìm được x_0.
- **Bước 3.** Thế x_0 vào $(***)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

❖ **Ví dụ minh họa**

Ví dụ. Cho hai hàm số:

$$(C_1): y = f(x) = 2\sqrt{x}, (x > 0) \text{ và } (C_2): y = g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{8 - x^2}, \left(-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\right).$$

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số là:

A. $y = \frac{1}{2}x + 5$. **B.** $y = \frac{1}{2}x - 1$. **C.** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **D.** $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Hướng dẫn giải

+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2) và $x_0 = a$ ($a > 0$ và $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$) là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là

$$y = f'(x)(x-a) + y_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}(x-a) + 2\sqrt{a}.$$

+ d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{8-x^2} = \frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} & (1) \\ \frac{-x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình hoành độ tiếp điểm của d và (C_2).

$$\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2} = -\frac{x^2}{2\sqrt{8-x^2}} - \frac{2\sqrt{8-x^2}}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ x \neq 0 \\ x(8-x^2) = -x^3 - 4(8-x^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ x \neq 0 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Thay $x = -2$ vào (2) ta được $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow x_0 = 4$. Vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm là $y = \frac{1}{2}x + 2$. Chọn đáp án **C.**

Bài toán 2: *Một số công thức nhanh và tính chất cần biết.*

Bài toán 2.1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0, x \neq -\frac{d}{c}\right)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ tại M thuộc (C) và I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Ta luôn có:

- Nếu $\Delta \perp IM$ thì chỉ tồn tại 2 điểm M thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) đối xứng qua

I và $x_M = \frac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}$. *Cách nhớ:* $\underbrace{cx_M + d}_{\text{mau so cua ham so}} = \pm\underbrace{\sqrt{|ad-bc|}}_{\text{tö so cua ñao ham}}$.

(I). M luôn là trung điểm của AB (với A, B là giao điểm của Δ với 2 tiệm cận).

(II). Diện tích tam giác IAB không đổi với mọi điểm M và $S_{\Delta IAB} = 2\frac{|bc-ad|}{c^2}$.

(III). Nếu E, F thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) và E, F đối xứng qua I thì tiếp tuyến tại E, F song song với nhau. (suy ra một đường thẳng d đi qua E, F thì đi qua tâm I).

Chứng minh:

- Ta có $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của 2 tiệm cận.
- Gọi $M\left(x_M; \frac{a x_M + b}{c x_M + d}\right) \in (C)$; $\left(x_M \neq -\frac{d}{c}\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta : y = \frac{ad - bc}{(cx_M + d)^2}(x - x_M) + \frac{ax_M + b}{cx_M + d}.$$

Chứng minh (I).

- $\overrightarrow{IM}\left(x_M + \frac{d}{c}; \frac{bc - ad}{c(cx_M + d)}\right)$; $\vec{u}_\Delta\left(1; \frac{ad - bc}{(cx_M + d)^2}\right)$
- $\Delta \perp IM \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow x_M + \frac{d}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx_M + d)}.\frac{ad - bc}{(cx_M + d)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(cx_M + d)^4 - (ad - bc)^2}{c(cx_M + d)^3} = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{\pm\sqrt{|ad - bc|} - d}{c}.$$

Chứng minh (II).

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $A\left(2x_M + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $B\left(-\frac{d}{c}; \frac{acx_M + 2bc - ad}{c(cx_M + d)}\right)$.
- Xét $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} = 2x_M \\ y_A + y_B = \frac{a}{c} + \frac{acx_M + 2bc - ad}{c(cx_M + d)} = 2\frac{ax_M + b}{cx_M + d} = 2y_M \end{cases}$.

Vậy M luôn là trung điểm của AB.

Chứng minh (III).

- $\overrightarrow{IA}\left(\frac{2(cx_M + d)}{c}; c\right)$ và $\overrightarrow{IB}\left(0; \frac{2(bc - ad)}{c(cx_M + d)}\right)$.
- ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}.\frac{2(cx_M + d)}{c}.\frac{2(bc - ad)}{c(cx_M + d)} = \frac{2|bc - ad|}{c^2} = \text{hằng số}.$$

Vậy diện tích ΔIAB không đổi với mọi điểm M.

Chứng minh (IV):

- Gọi $E\left(x_E; \frac{ax_E + b}{cx_E + d}\right) \in (C)\left(x_E \neq -\frac{d}{c}\right) \Rightarrow F\left(-\frac{2d}{c} - x_E; \frac{2a}{c} - \frac{ax_E + b}{cx_E + d}\right)$

  (E, F đối xứng qua I).

- Phương trình tiếp tuyến tại E có hệ số góc $k_E = \frac{ad - bc}{(cx_E + d)^2}$ (1).
- Phương trình tiếp tuyến tại F có hệ số góc

$$k_F = \frac{ad - bc}{\left[c\left(-\frac{2d}{c} - x_E\right) + d\right]^2} = \frac{ad - bc}{(-2d - cx_E + d)^2} = \frac{ad - bc}{(-d - cx_E)^2} = \frac{ad - bc}{(cx_E + d)^2} \quad (2).$$

- Từ (1) và (2) suy ra $k_E = k_F$.

Bài toán 2.2: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là (C), $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$. Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ trên (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=n.OB$. Khi đó x_0 thoả $\boxed{cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}}$.

Hướng dẫn giải

- Xét hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$. Ta có $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình

$$\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\Rightarrow y=\frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}(x-x_0)+\frac{ax_0+b}{cx_0+d}.$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{ad-bc};0\right)$.

$$B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\frac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{(cx_0+d)^2}\right).$$

- Ta có $OA=\left|\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{ad-bc}\right|=\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{|ad-bc|}$

$$OB=\left|\frac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{(cx_0+d)^2}\right|=\frac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{(cx_0+d)^2}$$

(vì A, B không trùng O nên $acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0$).

- Ta có $OA=n.OB\Leftrightarrow\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{|ad-bc|}=n.\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{(cx_0+d)^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{|ad-bc|}=n.\frac{1}{(cx_0+d)^2}\Leftrightarrow(cx_0+d)^2=n.|ad-bc|\Leftrightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}.$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y=-9x-26$. **B.** $y=9x-26$. **C.** $y=-9x-3$. **D.** $y=9x-2$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ tại điểm $B(1;-2)$ là

A. $y=4x+6$. **B.** $y=4x+2$. **C.** $y=-4x+6$. **D.** $y=-4x+2$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là

A. $y=2x+1$. **B.** $y=-2x+7$. **C.** $y=2x+7$. **D.** $y=-2x-1$.

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-2$ tại điểm D có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y=-9x+14$. **B.** $y=9x+14$. **C.** $y=-9x+22$. **D.** $y=9x+22$.

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4+8x^2$ tại điểm E có hoành độ bằng -3 có phương trình là

A. $y=60x+171$. **B.** $y=-60x+171$.

C. $y=60x+189$. **D.** $y=-60x+189$.

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ tại điểm F có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y=-x+5$. **B.** $y=x+5$. **C.** $y=-x-1$. **D.** $y=x-1$.

Câu 7. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3+3x^2$ tại điểm G có tung độ bằng 5 có phương trình là

A. $y=12x-7$. **B.** $y=-12x-7$. **C.** $y=12x+17$. **D.** $y=-12x+17$.

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-3$ tại điểm H có tung độ bằng 21 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y=40x-101 \\ y=-40x-59 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=40x-59 \\ y=-40x-101 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=40x+59 \\ y=-40x+101 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-40x-59 \\ y=40x+101 \end{array}\right.$.

Câu 9. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ tại điểm I có tung độ bằng 1 có phương trình là

A. $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{8}{5}$. **B.** $y=-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}$. **C.** $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{8}{5}$. **D.** $y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}$.

Câu 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-2$ có hệ số góc $k=-3$ có phương trình là

A. $y=-3x-7$. **B.** $y=-3x+7$. **C.** $y=-3x+1$. **D.** $y=-3x-1$.

Câu 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2$ có hệ số góc bằng $k=-48$ có phương trình là

A. $y=-48x+192$. **B.** $y=-48x+160$. **C.** $y=-48x-160$. **D.** $y=-48x-192$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{1-x}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 4.

A. $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$.

Câu 13. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-36x+5$ của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ có phương trình là

A. $y=-36x-54$. **B.** $y=-36x+54$. **C.** $y=-36x-90$. **D.** $y=-36x+90$.

Câu 15. Cho hàm $y=\dfrac{-x+5}{x+2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7}$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{7}x+\frac{5}{7} \\ y=-\frac{1}{7}x-\frac{23}{7} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{7}x+-\frac{5}{7} \\ y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7} \end{array}\right.$. **C.** $y=-\frac{1}{7}x-\frac{23}{7}$. **D.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7}$.

Câu 16. Cho hàm $y=2x^3-3x-1$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x+21y-2=0$ có phương trình là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{21}x-33 \\ y=\frac{1}{21}x+31 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-21x-33 \\ y=-21x+31 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=21x-33 \\ y=21x+31 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1}{21}x-33 \\ y=\frac{-1}{21}x+31 \end{array}\right.$.

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ vuông góc với đường thẳng $x-8y+2017=0$ có phương trình là

A. $y=-\frac{1}{8}x+8$. **B.** $y=8x+8$. **C.** $y=-8x+8$. **D.** $y=\frac{1}{8}x-8$.

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-2}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-6x+1$ là

A. $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$. **B.** $y=\frac{1}{6}x-1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{6}x-1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{6}x+\frac{13}{3} \end{array}\right.$.

Câu 19. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2$ tại giao điểm của đồ thị với trục Ox ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là

A. $y=-9x-18$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-9x-18 \end{array}\right.$. **C.** $y=-9x+18$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-9x+18 \end{array}\right.$.

Câu 21. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y=\frac{x-5}{-x+1}$ tại giao điểm A của (C) và trục hoành. Khi đó, phương trình của đường thẳng d là

A. $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$. **B.** $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$. **C.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$. **D.** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 22. Tại giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y=2x^3-6x+1$ và trục Oy ta lập được tiếp tuyến có phương trình là

A. $y=6x-1$. **B.** $y=-6x-1$. **C.** $y=6x+1$. **D.** $y=-6x+1$.

Câu 23. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y=-\frac{1}{4}x^4+3x^2-2$ tại giao điểm M của (C) với trục tung là

A. $\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=2 \end{array}\right.$. **B.** $y=2$. **C.** $y=-2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=0 \end{array}\right.$.

Câu 24. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ tại giao điểm A của (C) và trục tung. Khi đó, phương trình của đường thẳng d là

A. $y=\dfrac{7}{9}x-\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=-\dfrac{7}{9}x+\dfrac{1}{3}$. **C.** $y=-\dfrac{7}{9}x-\dfrac{1}{3}$. **D.** $y=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{1}{3}$.

Câu 25. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ song song với đường thẳng $y=3x+2016$ có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y=3x-\dfrac{2}{3} \\ y=3x-8 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\dfrac{2}{3} \\ y=3x+8 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-8 \\ y=3x+\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=3x+\dfrac{2}{3} \\ y=3x+8 \end{array}\right.$.

Câu 26. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x-5$ sẽ

A. song song với đường thẳng $x=1$. **B.** song song với trục hoành.

C. có hệ số góc dương. **D.** có hệ số góc bằng -1.

Câu 27. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

A. $x-2y-7=0$. **B.** $x+y-8=0$.

C. $2x-y-9=0$. **D.** $x+2y-9=0$.

Câu 28. Cho đường cong $(C): y=x^3-3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0=-1$.

A. $y=-9x+5$. **B.** $y=9x+5$. **C.** $y=9x-5$. **D.** $y=-9x-5$.

Câu 29. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=3x^3-x^2-7x+1$ tại điểm $A(0;1)$ là

A. $y=x+1$. **B.** $y=-7x+1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=0$.

Câu 30. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 5 là

A. $y=-45x+276$. **B.** $y=-45x+174$.

C. $y=45x+276$. **D.** $y=45x-174$.

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y=-3x+2$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=-3x+8$. **D.** $y=3x+8$.

Câu 32. Cho hàm số $y=-x^3+6x^2+3x-1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

A. $y=15x+55$. **B.** $y=-15x-5$. **C.** $y=15x-5$. **D.** $y=-15x+55$.

Câu 33. Cho hàm số $y=x^3+x+1$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Trên (C) tồn tại hai điểm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại A và B vuông góc.

C. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình là $y=4x-1$.

D. Đồ thị (C) chỉ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Câu 34. Đường thẳng $y=ax-b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-x+2$ tại điểm $M(1;0)$. Khi đó ta có

A. $ab=36$. **B.** $ab=-6$. **C.** $ab=-36$. **D.** $ab=-5$.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^3-x^2+2x+5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{3\sqrt{x}}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tạo với trục hoành góc 60^0 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\ 3x+4\ 3 \\ y=\ 3x \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=\ 3x-4\ 3 \\ y=\ 3x \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-\ 3x+4\ 3 \\ y=-\ 3x \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-\ 3x-4\ 3 \\ y=-\ 3x \end{array}\right.$.

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m+1)x+1$ (1), m là tham số. Kí hiệu (C_m) là đồ thị hàm số (1) và K là điểm thuộc (C_m), có hoành độ bằng -1. Tập tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm K song song với đường thẳng $d: 3x+y=0$ là

A. $\{-1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left\{-\frac{1}{3};-1\right\}$. **D.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=x^4+\frac{1}{2}mx^2+m-1$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 vuông góc với đường thẳng có phương trình $x-3y+1=0$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-\frac{13}{3}$. **D.** $m=-\frac{11}{3}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=\sqrt{2x+1}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến d của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $y=-3x+2017$. Hỏi hoành độ tiếp điểm của d và (C) bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{4}{9}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 40. Cho hàm số $y=3x-4x^3$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) ?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41. Cho hàm số $y=x^3+x+2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm $N(1;4)$ của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là M. Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(-1;0)$. **B.** $M(-2;-8)$. **C.** $M(0;2)$. **D.** $M(2;12)$.

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3-x^2+x+1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm N của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là $M(-1;-2)$. Khi đó tọa độ điểm N là

A. $(-1;-4)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 43. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (*C*). Với giá trị nào của *m* thì tiếp tuyến với đồ thị (*C*) tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua $A(1;3)$?

A. $m=\frac{7}{9}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=-\frac{7}{9}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị nào của *m* thì tiếp tuyến của (*C*) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $y = 3x + 1$?

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\frac{x}{x+1}$ có đồ thị (*C*) và gốc tọa độ *O*. Gọi Δ là tiếp tuyến của (*C*), biết Δ cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A*, *B* và tam giác *OAB* cân. Phương trình Δ là

A. $y=x+1$. **B.** $y=x+4$. **C.** $y=x-4$. **D.** $y=x$.

Câu 46. Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$ có đồ thị (*C*). Tiếp tuyến của đồ thị (*C*) cắt các trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại hai điểm *A*, *B* sao cho *OB* = 36*OA* có phương trình là:

A. $\left[\begin{array}{l}x-36y-4=0\\x+36y-4=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=-36x-86\\y=36x-86\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}y=-36x+58\\y=36x+58\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x-36y+14=0\\x+36y+14=0\end{array}\right.$.

Câu 47. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm *M* cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A*, *B* và tam giác *OAB* có trọng tâm *G* nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (1), *m* là tham số thực. Kí hiệu (C_m) là đồ thị hàm số (1); *d* là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm *m* để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4};1\right)$ đến đường thẳng *d* đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Câu 49. Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d_1: 3x+4y-2=0$ bằng 2.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 50. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI ?

A. $M\left(4;\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M\left(3;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $M(2;3)$. **D.** $M(5;3)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d: y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-5$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ (1).Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$. **B.** $y=-x$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=-x+1$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn $OA=4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{2} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>0$) thuộc đồ thị (C). Để khoảng cách từ tâm đối xứng I của đồ thị (C) đến tiếp tuyến Δ là lớn nhất thì tung độ của điểm M gần giá trị nào nhất?

A. $\frac{7\pi}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{5\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 55. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất thì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Câu 56. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất. Khi đó, độ dài lớn nhất của vectơ OM gần giá trị nào nhất ?

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt 2 tiệm cận tại A và B sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiếp tuyến Δ gần giá trị nào nhất?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào?

A. $(27;28)$. **B.** $(28;29)$. **C.** $(26;27)$. **D.** $(29;30)$.

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	C	A	A	A	A	B	C	D	B	D	B	A	C	C	C	D	D	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	D	C	C	A	B	D	B	B	D	B	A	B	A	D	C	B	A	C	C

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D	D	D	A	

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Chọn B.**

Tính $y'=3x^2-6x\Rightarrow y'(3)=9\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=9x-26$.

Câu 2. **Chọn D.**

Tính $y'=4x^3-8x\Rightarrow y'(1)=-4\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+2$.

Câu 3. **Chọn C.**

Tính $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(-2)=2\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=2x+7$.

Câu 4. **Chọn A.**

Tính $y_0=y(2)=-4$ và $y'=-3x^2+3\Rightarrow y'(2)=-9$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-9x+14$.

Câu 5. **Chọn A.**

Tính $y_0=y(-3)=-9$ và $y'=-4x^3+16x\Rightarrow y'(-3)=60$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=60x+171$.

Câu 6. **Chọn A.**

Tính $y_0=y(2)=3$ và $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-1$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-x+5$.

Câu 7. **Chọn A.**

Giải phương trình $2x_0^3+3x_0^2=5\Leftrightarrow x_0=1$, và $y'=6x^2+6x\Rightarrow y'(1)=12$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=12x-7$.

Câu 8. **Chọn B.**

Giải phương trình $x_0^4+2x_0^2-3=21\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-2\end{array}\right.$. Đồng thời $y'=4x^3+4x$, suy ra $\left[\begin{array}{l}y'(2)=40\\y'(-2)=-40\end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=40x-59$ và $y=-40x-101$.

Câu 9. **Chọn C.**

Giải phương trình $\dfrac{x_0+2}{2x_0-1}=1\Leftrightarrow x_0=3$ và $y'=\dfrac{-5}{(2x-1)^2}\Rightarrow y'(3)=\dfrac{-1}{5}$. Phương trình tiếp tuyến là $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{8}{5}$.

Câu 10. **Chọn D.**

Giải phương trình $y'(x_0)=-3 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+3=0 \Leftrightarrow x_0=1$. Đồng thời $y(1)=-4$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-3x-1$.

Câu 11. **Chọn B.**

Giải phương trình $y'(x_0)=-48 \Leftrightarrow -x_0^3+4x_0+48=0 \Leftrightarrow x_0=4$. Đồng thời $y(4)=-32$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-48x+160$.

Câu 12. **Chọn D.**

Giải phương trình

$$y'(x_0)=4 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow y(0)=3 \Rightarrow pttt: y=4x+3 \\ x_0=2 \Rightarrow y(2)=-5 \Rightarrow pttt: y=4x-13 \end{array}\right..$$

Câu 13. **Chọn B.**

Giải phương trình

$$y'(x_0)=1 \Leftrightarrow -3x_0^2+4x_0-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \Rightarrow y(1)=1 \Rightarrow pttt: y=x \text{ (trùng)} \\ x_0=\frac{1}{3} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27} \Rightarrow pttt: y=x-\frac{4}{27} \end{array}\right..$$

Câu 14. **Chọn A.**

Giải phương trình $y'(x_0)=-36 \Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0 \Leftrightarrow x_0=-2$. Đồng thời $y(-2)=18$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-36x-54$.

Câu 15. **Chọn C.**

Giải phương trình

$$y'(x_0)=-\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{-7}{(x_0+2)^2}=\frac{-1}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=5 \Rightarrow y(5)=0 \Rightarrow pttt: y=-\frac{1}{7}x+\frac{5}{7} \text{ (trùng)} \\ x_0=-9 \Rightarrow y(-9)=-2 \Rightarrow pttt: y=-\frac{1}{7}x-\frac{23}{7} \end{array}\right..$$

Câu 16. **Chọn C.**

Giải phương trình

$$y'(x_0)=21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \Rightarrow y(2)=9 \Rightarrow pttt: y=21x-33 \\ x_0=-2 \Rightarrow y(-2)=-11 \Rightarrow pttt: y=21x+31 \end{array}\right..$$

Câu 17. **Chọn C.**

Giải phương trình $y'(x_0)=-8 \Leftrightarrow x_0=1$. Đồng thời $y(1)=0$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-8x+8$.

Câu 18. **Chọn D.**

Giải phương trình $y'(x_0)=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=4 \Rightarrow y(4)=1 \Rightarrow pttt: y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\ x_0=-8 \Rightarrow y(-8)=3 \Rightarrow pttt: y=\frac{1}{6}x+\frac{13}{3} \end{array}\right..$

Câu 19. **Chọn D.**

Giải phương trình $x^4-4x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x=0 & \Rightarrow y'(0)=0 & \Rightarrow pttt: y=0 \\ x=2 & \Rightarrow y'(2)=16 & \Rightarrow pttt: y=16x-32 \\ x=-2 & \Rightarrow y'(-2)=-16 & \Rightarrow pttt: y=-16x-32 \end{array}\right..$

Câu 20. **Chọn B.**

Ta giải phương trình

$$-x^3+3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x=1 & \Rightarrow y'(1)=0 & \Rightarrow pttt:\ y=0 \\ x=-2 & \Rightarrow y'(-2)=-9 \Rightarrow pttt: & y=-9x-18 \end{array}\right.$$

Câu 21. **Chọn D.**

Ta giải phương trình $\frac{x-5}{-x+1}=0 \Leftrightarrow x=5$. Đồng thời $y'(5)=-\frac{1}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 22. **Chọn D.**

Giao điểm của (C) và Oy là $A(0;1) \Rightarrow y'(0)=-6$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-6x+1$.

Câu 23. **Chọn C.**

Giao điểm của (C) và Oy là $M(0;-2) \Rightarrow y'(0)=0$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-2$.

Câu 24. **Chọn C.**

Giao điểm của (C) và Oy là $A\left(0;-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y'(0)=-\frac{7}{9}$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-\frac{7}{9}x-\frac{1}{3}$.

Câu 25. **Chọn A.**

Ta giải phương trình $y'(x_0)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0=1 \Rightarrow y(1)=\frac{7}{3} & \Rightarrow pttt: y=3x-\frac{2}{3} \\ x_0=3 \Rightarrow y(3)=1 & \Rightarrow pttt: y=3x-8 \end{array}\right.$.

Câu 26. **Chọn B.**

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \Rightarrow y(1)=\frac{-11}{3} \\ x_0=3 \Rightarrow y(3)=-5,\quad y'(3)=0 \end{array}\right.$. Vậy tiếp tuyến song song trục hoành.

Câu 27. **Chọn D.**

Theo giả thiết ta có $y_0=3 \Rightarrow x_0=3$ và $y'(3)=-\frac{1}{2}$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $x+2y-9=0$.

Câu 28. **Chọn B.**

Theo giả thiết ta có $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-4$ và $y'(-1)=9$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=9x+5$.

Câu 29. **Chọn B.**

Theo giả thiết ta có $x_0=0 \Rightarrow y_0=1$ và $y'(0)=-7$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-7x+1$.

Câu 30. **Chọn D.**

Theo giả thiết ta có $x_0=5 \Rightarrow y_0=51$ và $y'(5)=45$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=45x-174$.

Câu 31. **Chọn B.**

Ta có $y'=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3\ge 3 \Rightarrow \min y'=3$ khi $x=x_0=1 \Rightarrow y_0=y(1)=5$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y=3(x-1)+5=3x+2$.

Câu 32. **Chọn A.**

Ta có $y'=-3x^2+12x+3=-3(x+2)^2+15\le 15 \Rightarrow \max y'=15$ khi $x=x_0=-2$. Lúc đó $y_0=y(-2)=25$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y = 15(x+2) + 25 = 15x + 55$.

Câu 33. Chọn B.

[Phương pháp tự luận]

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_1) = 3x_1^2 + 1 > 0 \\ y'(x_2) = 3x_2^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow y'(x_1).y'(x_2) > 0$

hay $y'(x_1).y'(x_2) \neq -1$. Suy ra 2 tiếp tuyến A và B không vuông góc.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\to$ **A, D đúng**.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(1) = 4, y_0 = 3$. Vậy phương trình tiếp tuyến $y = 4(x-1) + 3 = 4x - 1 \to$ **C đúng**.

Câu 34. Chọn A.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 1 \Rightarrow y'(1) = 6$. Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là $y = 6(x-1) = 6x - 6$, nên $\begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow ab = 36$.

Câu 35. Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{5}{3} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \min y' = \frac{5}{3}$ khi $x = x_0 = \frac{1}{3}$.

Câu 36. Chọn C.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$. Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ tạo với Ox góc 60^0

$\Rightarrow y'(x_0) = \pm \tan 60^0 = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{y'<0} y'(x_0) = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2\sqrt{3} \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$. Các tiếp tuyến tương ứng có phương trình là $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$.

Câu 37. Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m+1)$. Do $K \in (C_m)$ và có hoành độ bằng -1, suy ra $K(-1; -6m-3)$.

Khi đó tiếp tuyến tại K có phương trình

$$\Delta : y = y'(-1)(x+1) - 6m - 3 = (9m+6)x + 3m + 3.$$

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d

$$\Rightarrow 3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} 9m + 6 = -3 \\ 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy không tồn tại m, ta chọn $\varnothing$.

Câu 38. Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 + mx$ và đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ viết thành $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán, phải có $y'(-1) = -3 \Leftrightarrow -4 - m = -3 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 39. Chọn C.

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C).

Theo yêu cầu bài toán, ta có $y'(x_0)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2x_0+1}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x_0+1=9\Leftrightarrow x_0=4$.

Câu 40. **Chọn C.**

Đường thẳng đi qua $M(1;3)$ có hệ số góc k có dạng $d: y=k(x-1)+3$.

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}3x-4x^3=k(x-1)+3 & (1)\\ 3-12x^2=k & (2)\end{cases}$. Thay

(2) vào (1) ta được

$3x-4x^3=(3-12x^2)(x-1)+3\Leftrightarrow 8x^3-12x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\\ k=-24\end{array}\right.$.

Vậy có 2 tiếp tuyến.

Câu 41. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Ta có $y'=3x^2+1\Rightarrow y'(1)=4$, suy ra tiếp tuyến tại $N(1;4)$ là $\Delta: y=4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) là

$$x^3+x+2=4x\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\Rightarrow y=-8\end{array}\right..$$

Phương pháp trắc nghiệm

$2x_N+x_M=-\frac{b}{a}$ (Với $y=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2+x_M=0\Leftrightarrow x_M=-2\Rightarrow M(-2;-8)$.

Câu 42. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-2)$ có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k(x+1)-2$.

Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}x^3-x^2+x+1=k(x+1)-2 & (1)\\ 3x^2-2x+1=k & (2)\end{cases}.$$

Thay (2) vào (1) ta được

$x^3-x^2+x+1=(3x^2-2x+1)(x+1)-2\Leftrightarrow(x+1)^2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\Rightarrow y=2\end{array}\right.\Rightarrow N(1;2)$.**Phư**

ơng pháp trắc nghiệm

$2x_N+x_M=-\frac{b}{a}$ (Với $y=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2x_N+(-1)=1\Leftrightarrow x_N=1\Rightarrow N(1;2)$.

Câu 43. **Chọn B.**

Ta có $y'=3x^2+6mx+m+1$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.

Khi đó $x_0=-1\Rightarrow\begin{cases}y'(-1)=4-5m\\ y_0=2m-1\end{cases}$, suy ra phương trình tiếp tuyến là

$\Delta: y=(4-5m)(x+1)+2m-1$.

Do $A(1;3)\in\Delta\Rightarrow 3=(4-5m)(1+1)+2m-1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 44. **Chọn D.**

Ta có $y' = \dfrac{1+m}{(x+1)^2}$ khi đó $y'(0) = 3 \Leftrightarrow 1+m = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 45. **Chọn B.**

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của (C) với tiếp tuyến cần lập.

Tam giác OAB cân tại O nên $OA = OB$, suy ra

$$y'(x_0) = \pm 1 \xrightarrow{y'>0} y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right..$$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$ (loại, do $M(0;0) \equiv O$).
- Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 2$, suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = x + 4$.

Câu 46. **Chọn C.**

Do $\dfrac{OB}{OA} = 36 \Rightarrow y'(x_0) = \pm 36$.

- Với $y'(x_0) = -36 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -36 \Leftrightarrow 4x_0^3 + 2x_0 - 36 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

Vậy $y_0 = y(2) = -14$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -36x + 58$.

- Với $y'(x_0) = 36 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = 36 \Leftrightarrow 4x_0^3 + 2x_0 + 36 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$.

Vậy $y_0 = y(-2) = -14$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = 36x + 58$.

Câu 47. **Chọn A.**

- Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}\right) \in (C)$
- Gọi Δ tiếp tuyến của (C) tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)} = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}.$$

- Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2}; 0\right)$ và $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0+1)^2}\right)$.
- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6}; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do G thuộc đường thẳng $4x + y = 0 \Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 4 = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ (vì A, B không trùng O nên $x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 1 = \dfrac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

- Vì $x_0 > -1$ nên chỉ chọn $x_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow x_0 + 2y_0 = -\dfrac{7}{2}$.

Câu 48. **Chọn B.**

- $A\in(C_m)$ nên $A(1;1-m)$. Ngoài ra $y'=4x^3-4mx\Rightarrow y'(1)=4-4m$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là $y-1+m=y'(1).(x-1)$, hay
$$(4-4m)x-y-3(1-m)=0.$$
- Khi đó $d(B;\Delta)=\dfrac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2+1}}\le 1$, Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow$ khi $m=1$.
- Do đó $d(B;\Delta)$ lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 49. **Chọn C.**

- Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$.
- Ta có $d(M,d_1)=2\Leftrightarrow\dfrac{|3x_0+4y_0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x_0+4y_0-12=0\\3x_0+4y_0+8=0\end{array}\right.$.
- Với $3x_0+4y_0-12=0\Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow M_1(0;3)\\x_0=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{4}\right)\end{array}\right.$
- Với $3x_0+4y_0+8=0\Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-5\Rightarrow M_3\left(-5;\dfrac{7}{4}\right)\\x_0=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow M_4\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)\end{array}\right.$.

Suy ra có 4 tiếp tuyến.

Câu 50. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận.

- Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;2)$. Gọi $M(a;b)\in(C)\Rightarrow b=\dfrac{2a-1}{a-1}\ (a>1)$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=-\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.
- Phương trình đường thẳng MI là $y=\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-1)+2$.
- Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có
$$-\frac{1}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{(a-1)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\Rightarrow b=1\\a=2\Rightarrow b=3\end{array}\right.$$

Vì yêu cầu hoành độ lớn hơn 1 nên điểm cần tìm là $M(2;3)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$, điểm M thoả yêu cầu bài toán có hoành độ được tính như sau:
$$x_0-1=\pm\sqrt{|2.(-1)-1.(-1)|}\Leftrightarrow x_0-1=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=3\\x_0=0\ (L)\end{array}\right..$$

Vậy $M(2;3)$.

Câu 51. **Chọn A.**

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{1}{2} \\ g(x)=2x^2+2mx-m-1=0 \ (*) \end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có $x_1+x_2=-m;\ x_1x_2=\frac{-m-1}{2}$. Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.
- Ta có $y'=\frac{-1}{(2x-1)^2}$, nên tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$k_1=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}$ và $k_2=-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4(m+1)^2-2\leq -2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 52. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}<0$.
- ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ (vì tiếp tuyến có hệ số góc âm). Nghĩa là $y'(x_0)=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-2\Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$.
- Với $x_0=-1;\ y_0=1\Rightarrow \Delta:\ y-1=-(x+1)\Leftrightarrow y=-x$ (loại).
- Với $x_0=-2;\ y_0=0\Rightarrow \Delta:\ y-0=-(x+2)\Leftrightarrow y=-x-2$ (nhận).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-2$.

Phương pháp trắc nghiệm

- Tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O nên ta có $OA=OB\Rightarrow n=1$.

$acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0\Rightarrow 2x_0^2+8x_0+6\neq 0\Leftrightarrow x_0\neq -1;\ x_0\neq -3$

$$cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}\Rightarrow 2x_0+3=\pm\sqrt{1.|-1|}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\ (L) \\ x_0=-2\ (N) \end{array}\right..$$

- Với $x_0=-2;\ y_0=0\Rightarrow \Delta:\ y-0=-(x+2)\Leftrightarrow y=-x-2$ (nhận).

Câu 53. **Chọn A.**

- Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.
- Do ΔOAB vuông tại A nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.
- Vì $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0$ nên hệ số góc của d bằng $-\frac{1}{4}$, suy ra

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{3}{2}\\x_0=3\Rightarrow y_0=\frac{5}{2}\end{array}\right..$$

- Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2}\\y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\\y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}\end{array}\right..$

Câu 54. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$; $I(1;1)$.
- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C),\ (x_0\neq 1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0\ .$$

- $d(I,\Delta)=\frac{2|x_0-1|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}\le\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$
- Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}=(x_0-1)^2\Leftrightarrow|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2\ (N)\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị $\frac{\pi}{2}$ nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-1=\pm\sqrt{|-1-0|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x_0=2\Rightarrow y_0=2 & (N)\\x_0=0 & (L)\end{array}\right..$

Câu 55. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\frac{3}{(x+1)^2}$.
- Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\neq-1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0\ .$$

- $d(I,\Delta)=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\frac{6}{\sqrt{2\cdot 9}}=\sqrt{6}.$
- Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\ (L)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\ (N)\end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\ (L)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\ (N)\end{array}\right..$$

Câu 56. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C),(x_0\neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+2+\frac{1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0-2;2)$.
- Ta có $AB^2=4\left[(x_0-2)^2+\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 8$. Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\Rightarrow y_0=3\Rightarrow\overrightarrow{OM}(3;3)\Rightarrow \overrightarrow{OM}=3\sqrt{2}\ (N)\\ x_0=1\Rightarrow y_0=1\Rightarrow\overrightarrow{OM}(1;1)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\sqrt{2}\ (L)\end{array}\right..$$

Phương pháp trắc nghiệm

- AB ngắn nhất suy ra khoảng cách từ I đến tiếp tuyến Δ tại M ngắn nhất

$\Rightarrow IM\perp\Delta\Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M-2=\pm\sqrt{|-4+3|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=3\Rightarrow y_M=3\\ x_M=1\Rightarrow y_M=1\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=3\sqrt{2}$.

Câu 57. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C),\ (x_0\neq -1), I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0+1;1)$.
- Ta có $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|}, IB=2|x_0+1|\Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là

$S_{IAB}=pr$, suy ra

$r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

- Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow\left|x_0-1\right|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.
- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.
- $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Câu 58. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;2+\frac{3}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\ne1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta:y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\frac{3}{x_0-1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(1;2+\frac{6}{x_0-1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B\left(2x_0-1;2\right)$.
- Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}.\frac{6}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=2.3=6$.
- ΔIAB vuông tại I có diện tích không đổi $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$IA=IB\Leftrightarrow\frac{6}{|x_0-1|}=2|x_0-1|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

- Với $x_0=1+\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là $\Delta:y=-x+3+2\sqrt{3}$. Suy ra

$$d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

- Với $x_0=1-\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là $\Delta:y=-x+3-2\sqrt{3}$. Suy ra

$$d(O,\Delta)=\frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất là $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ gần với giá trị 5 nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA=IB\Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M-1=\pm\sqrt{|-2-1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\\x_M=1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N)$.

Câu 59. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0-2}\right)\in(C),(x_0\neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=-\frac{3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(2;\dfrac{2x_0+2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0-2;\,2)$.
- Xét $\begin{cases} x_A+x_B=2+2x_0-2=2x_0\\ y_A+y_B=\dfrac{2x_0+2}{x_0-2}+2=2.\dfrac{2x_0-1}{x_0-2}=2y_0\end{cases}$ $\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.
- ΔIAB vuông tại I nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB.

$$\Rightarrow S=\pi R^2=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-1}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{9}{(x_0-2)^2}\right]\geq 6\pi$$

- Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{9}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=\sqrt{3}+2\\ x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.$.
- Với $x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow\Delta: y=-x+2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại $E\left(0;2\sqrt{3}+4\right)$ và $F\left(2\sqrt{3}+4;0\right)$, suy ra $S_{OEF}=\dfrac{1}{2}OE.OF=14+8\sqrt{3}\approx 27,8564$
- Với $x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow\Delta: y=-x-2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại $E\left(0;-2\sqrt{3}+4\right)$ và $F\left(-2\sqrt{3}+4;0\right)$, suy ra $S_{OEF}=\dfrac{1}{2}OE.OF=14-8\sqrt{3}\approx 0,1435$

Phương pháp trắc nghiệm

- IM lớn nhất $\Leftrightarrow IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-2=\pm\sqrt{|-4+1|}$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=\sqrt{3}+2\\ x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.$. Giải tương tự như trên.

Chủ đề 2.3 - ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Hãy tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

❖ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1:** Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau:

$$Am + B = 0 \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C = 0.$$

- **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

- **Bước 3:** Kết luận
  - ✓ Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
  - ✓ Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

II. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

❖ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- **Bước 2:** Lí luận để giải bài toán.

III. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị* $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ *trên đồ thị* (C) *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm* $I(x_I, y_I)$.

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.
- ✓ Ta có $\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Trường hợp đặc biệt : *Cho đồ thị* $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. *Trên đồ thị* (C) *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M\left(a, Aa^3+Ba^2+Ca+D\right), N\left(b, Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

✓ Ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=0 \end{cases}$.

✓ Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M , N .

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C): $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d : y = A_1x + B_1$.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M\left(a; Aa^3+Ba^2+Ca+D\right)$, $N\left(b; Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d .

✓ Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d).

✓ Giải hệ phương trình tìm được M, N.

IV. Bài toán tìm điểm đặc biệt khác:

1. Lí thuyết:

Loại 1. Cho hai điểm $P(x_1;y_1);Q(x_2;y_2) \Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng $d : Ax + By + C = 0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h(M;d)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Loại 2. Khoảng cách từ $M(x_0;y_0)$ đến tiệm cận đứng $x=a$ là $h=|x_0-a|$.

Loại 3. Khoảng cách từ $M(x_0;y_0)$ đến tiệm cận ngang $y=b$ là $h=|y_0-b|$

Chú ý: Những điểm cần tìm thường là hai điểm cực đại, cực tiểu hoặc là giao của một đường thẳng với một đường cong (C) nào đó. Vì vậy trước khi áp dụng công thức, ta cần phải tìm tìm điều kiện tồn tại rồi tìm tọa độ của chúng.

2. Các bài toán thường gặp:

Bài toán 1: *Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$ có đồ thị (C). Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ (C) có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α, β là hai số dương.

✓ Nếu A thuộc nhánh trái thì $x_A<-\dfrac{d}{c} \Rightarrow x_A=-\dfrac{d}{c}-\alpha<-\dfrac{d}{c}$; $y_A=f(x_A)$.

- ✓ Nếu B thuộc nhánh phải thì $x_B > -\frac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\frac{d}{c} + \beta > -\frac{d}{c}$; $y_B = f(x_B)$.
- ✓ Sau đó tính $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left[(a+\beta)-(a-\alpha)\right]^2 + (y_B - y_A)^2$.
- ✓ Áp dụng bất đẳng thức Côsi (Cauchy), ta sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Gọi $M(x; y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = |x| + |y|$
- ✓ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- ✓ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- ✓ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Theo đầu bài ta có $|y| = k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = kx \\ y = -kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = kx \\ f(x) = -kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- ✓ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- ✓ Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$IM^2 = \left(x_M + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \frac{a}{c}\right)^2 = g(x_M)$$

- ✓ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.*

❖ **Phương pháp giải**

- ✓ Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I(x_0; y_0)$; $y_0 = f(x_0)$.
- ✓ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h(I; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ✓ Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

B. BÀI TẬP TRẮCNGHIỆM

Câu 1. Đồ thị của hàm số $y=(m-1)x+3-m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(0;3)$. **B.** $M(1;2)$. **C.** $M(-1;-2)$. **D.** $M(0;1)$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=x^2+2mx-m+1$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(0;1)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $M(-1;0)$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+mx+m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(-1;2)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $M(1;-4)$.

Câu 4. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^4-2mx^2+3$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi, khi đó tọa độ của điểm M là

A. $M(-1;1)$. **B.** $M(1;4)$. **C.** $M(0;-2)$. **D.** $M(0;3)$.

Câu 5. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+m}{x+m}$ $(m\neq 0)$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi. Tọa độ điểm M khi đó là

A. $M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(-1;1)$. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 6. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3mx^2-x+3m$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 7. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng 1 là

A. $M(0;1)$, $M(2;3)$. **B.** $M(2;1)$.

C. $M\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M\left(3;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 8. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y=(1-2m)x^4+3mx^2-m-1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ mà có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) bằng 4 là

A. $(4;3),(-2;1)$. **B.** $(2;5),(0;-1)$.

C. $(2;5),(0;-1),(4;3),(-2;1)$. **D.** $(2;5),(4;3)$.

Câu 10. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{-x+m}$ $(m\neq -2)$ luôn luôn đi qua một điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ cố định khi m thay đổi, khi đó x_M+y_M bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-x-4m$ có đồ thị $(C)_m$ và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

A. $m=-3$. **B.** $m=-6$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 12. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2}{x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-5x^2+6x+3$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 14. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên dương ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{4}{3x-2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm uốn của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-x^2-1$, thì x_1x_2 có giá trị bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Câu 17. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{6}{4x-1}$ số điểm có tọa độ nguyên là

A. 4. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+10}{x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 19. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 20. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{5x-2}{3x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 21. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{8x+11}{4x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22. Tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của đồ thị hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(4;3)$. **B.** $M(3;5)$. **C.** $M(1;-3)$. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 23. Số cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x^2-2$ đối xứng với nhau qua điểm $I(2;18)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Trong tất cả các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{3x+5}{x-1}$, số điểm có hoành độ lớn hơn tung độ là

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 25. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Biết tọa độ điểm $M(x_M;y_M)$ có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) sao cho MI ngắn nhất. Khi đó giá trị x_M-y_M bằng

A. 0. **B.** $2\sqrt{3}$.

C. 2. **D.** -2.

Câu 26. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x-2$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;18)$ là

A. $(1;2)$ và $(3;34)$. **B.** $(3;2)$ và $(1;34)$.

C. $(0;-2)$ và $(4;74)$. **D.** $(1;2)$ và $(-1;-6)$.

Câu 27. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-4x^2+9x+4$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O là

A. $(3;22)$ và $(-3;-22)$. **B.** $(2;14)$ và $(-2;-14)$.

C. $(1;10)$ và $(-1;-10)$. **D.** $(0;4)$ và $(4;40)$.

Câu 28. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=-\frac{1}{2}x$ là

A. $(1;2)$ và $(-2;-10)$. **B.** $(2;-1)$ và $(-2;1)$.

C. $(1;-2)$ và $(-1;2)$. **D.** $(1;2)$ và $(-1;-2)$.

Câu 29. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ mà có khoảng cách đến tiệm cận ngang của (C) bằng 1 là

A. $M(3;2)$. **B.** $M(5;2)$.

C. $M(5;2), M(-1;0)$. **D.** $M\left(4;\frac{5}{2}\right), M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 30. Các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $-1<m<0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m>0$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến giao điểm của hai tiệm cận. Giá trị nhỏ nhất có thể có của d là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Diện tích của tam giác ABI bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 33. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+1}$, biết M có hoàng độ a và khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy. Giá trị có thể có của a là

A. $a=1$ hoặc $a=\dfrac{7}{3}$. **B.** $a=-1$ hoặc $x=\dfrac{7}{3}$.

C. $a=-1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$. **D.** $a=1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc đồ thị (C) và d là tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C). Giá trị nhỏ nhất của d có thể đạt được là

A. 6. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 5

Câu 35. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ mà chúng đối xứng nhau qua trục tung là

A. $\left(3;-\dfrac{16}{3}\right)$ và $\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$. **B.** $\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$ và $\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.

C. $\left(2;\dfrac{11}{3}\right)$ và $\left(-2;\dfrac{11}{3}\right)$. **D.** $\left(2;-\dfrac{11}{3}\right)$ và $\left(-2;-\dfrac{11}{3}\right)$.

Câu 36. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+5x+15}{x+3}$ cách đều hai trục tọa độ ?

A. 2. **B.** Có vô số điểm M thỏa yêu cầu.

C. 1. **D.** Không có điểm M thỏa yêu cầu.

Câu 37. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ có tọa độ nguyên ?

A. 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3(m-1)x^2-3mx+2$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định $P(x_P;y_P)$ và $Q(x_Q;y_Q)$ khi m thay đổi, khi đó giá trị của y_P+y_Q bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 39. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.là

A. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right), M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

B. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M_2\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

C. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

D. $M_1\left(-1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M_2\left(-1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{x^2-4mx+5m}{x-2}$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)\setminus\left\{-\frac{4}{13}\right\}$.

C. $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B.** 2. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 42. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ sao cho M cách đều hai điểm $A(2,0)$ và $B(0,2)$ là

A. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **D.** Không tồn tại điểm M.

Câu 43. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ đến $I(1,4)$ là

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 4.

Câu 45. Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$, độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 46. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^4+mx^2-m+2016$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A. $I(-1;0)$. **B.** $I(1;2016)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(0;2017)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 49. Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x-2y-6=0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Câu 50. Cho hàm số $y=x^4+mx^2-m-1$ có đồ thị (C_m). Tọa độ các điểm cố định của (C_m) là

A. $(-1;0),(1;0)$. **B.** $(1;0),(0;1)$. **C.** $(-2;1),(-2;3)$. **D.** $(2;1),(0;1)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+2}{2x+2}$ có đồ thị (C). Hỏi trên (C) có bao nhiêu điểm có hoành độ và tung độ là các số tự nhiên.

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 52. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ có đồ thị (C_m). Gọi A là điểm cố định có hoành độ dương của (C_m). Khi tiếp tuyến tại A của (C_m) song song với đường thẳng $d: y=16x$ thì giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{63}{64}$.

Câu 53. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ đến đường thẳng $d: y+3x+6=0$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 55. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ cách đều hai đường tiệm cận của (C) là

A. $M(2;1)$. **B.** $M(0;-1), M(4;3)$.

C. $M\left(5;\dfrac{7}{3}\right), M\left(-3;\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $M(-2;2)$.

Câu 56. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ cách đều hai trục tọa độ là

A. $M(-1;-1), M(3;3)$. **B.** $M(-1;3)$.

C. $M(-1;-1)$. **D.** $M(3;3)$.

Câu 57. Tọa độ điểm M có hoành độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ bằng $\dfrac{1}{2}$ là

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(2;4)$.

C. $M(2;4); M(-2;0)$. **D.** $M(2;-2)$.

Câu 58. Cho hàm số $y=(m+2)x^3-3(m-2)x+m+7$ có đồ thị (C_m). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. (C_m) không đi qua điểm cố định nào.

B. (C_m) có đúng hai điểm cố định.

C. (C_m) có đúng ba điểm cố định.

D. (C_m) có đúng một điểm cố định.

Câu 59. Điều kiện của tham số m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-(3m-1)x^2+2mx+m+1$ có ít nhất hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua trục Oy là

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\le -2$.

Câu 60. Đồ thị hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có hai điểm cực trị cách đều trục tung khi và chỉ khi:

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1; m=-2$. **D.** $m=-2$.

Câu 61. Hỏi trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có bao nhiêu điểm cách đều hai trục tọa độ?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 62. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ cách đều hai tiệm cận của (C).

A. $M(-1;1); N(-4;-6)$. **B.** $M(1;1); N(3;4)$.

C. $M(-1;3); N(-3;3)$. **D.** $M(-1;3); N(-3;3)$.

Câu 63. Tọa độ hai điểm trên đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x+2$ sao cho hai điểm đó đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$ là

A. $(-1;0);(1;6)$. **B.** $(1;0);(1;6)$. **C.** $(0;2);(-2;4)$. **D.** $(1;0);(-1;6)$.

Câu 64. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 65. Tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất là

A. $(1;1)$.
B. $\left(1+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$.
C. $\left(1-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$.
D. $\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$.

Câu 66. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-3x+1}{x+1}$ nhận điểm nào trong các điểm sau làm tâm đối xứng ?

A. $K(-1;-3)$. **B.** $N(3;-1)$. **C.** $M(-1;3)$. **D.** $I(-3;-1)$.

Câu 67. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ cách đều tiệm cận đứng và trục hoành là

A. $M(2;1)$, $M(4;3)$.
B. $M(0;-1)$, $M(4;3)$.
C. $M(0;-1)$, $M(3;2)$.
D. $M(2;1)$, $M(3;2)$.

Câu 68. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

C. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D	D	D	A	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	B	A	A	A	C	D	C	D	D	A	D	C	B	C	C	B	C	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	C	C	B	A	D	B	D	B	A	B	A	D	C	B	A	C	C	B	B

61	62	63	64	65	66	67	68												
C	B	C	D	D	D	B	A												

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = (m-1)x_0 + 3 - m, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)m - x_0 - y_0 + 3 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -x_0 - y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 2. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = x_0^2 + 2mx_0 - m + 1$

$$\Leftrightarrow (2x_0 - 1)m + x_0^2 + 1 - y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ y_0 = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}\right).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 3. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + mx_0 + m, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)m + x_0^3 - 3x_0^2 - y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ x_0^3 - 3x_0^2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -4 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -4)$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 4. **Chọn D.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có

$$y_0 = x_0^4 - 2mx_0^2 + 3, \forall m \Leftrightarrow 2x_0^2 m + y_0 - 3 - x_0^4 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 = 0 \\ y_0 - 3 - x_0^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0;3).$$ **P**

hương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 5. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = \dfrac{(m+1)x_0 + m}{x_0 + m}, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow x_0 y_0 + my_0 = mx_0 + x_0 + m, \forall m \neq 0$

$$\Leftrightarrow m(y_0 - x_0 - 1) + x_0 y_0 - x_0 = 0, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0 \\ x_0 y_0 - x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định

Câu 6. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 - x_0 + 3m, \forall m$

$$\Leftrightarrow 3(1 - x_0^2)m + x_0^3 - x_0 - y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0^2 = 0 \\ x_0^3 - x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm cố định.

Câu 7. **Chọn A.**

Gọi $M\left(a; \dfrac{2a-1}{a-1}\right) \in (C)$ với $a \neq 1$.

Tiệm cận đứng của (C) là $x = 1$.

Ta có $|a-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$. Vậy $M(0;1), M(2;3)$.

Câu 8. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = (1-2m)x_0^4 + 3mx_0^2 - m - 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow (2x_0^4 - 3x_0^2 + 1)m + y_0 - x_0^4 + 1 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^4 - 3x_0^2 + 1 = 0 \\ y_0 - x_0^4 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0=-\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho đi qua bốn điểm cố định.

Câu 9. **Chọn C.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Tiệm cận đừng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt có phương trình $x=1, y=2$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $h_1=|a-1|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $h_2=\left|\dfrac{2a+1}{a-1}-2\right|=\dfrac{3}{|a-1|}$

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng 4 nên ta có:

$$h_1+h_2=4\Leftrightarrow |a-1|+\frac{3}{|a-1|}=4\Leftrightarrow |a-1|^2-4|a-1|+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a-1|=3 \\ |a-1|=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \\ a=2 \\ a=0 \end{array}\right..$$

Vậy các điểm cần tìm là: $(2;5)$, $(0;-1)$, $(4;3)$, $(-2;1)$.

Câu 10. **Chọn C.**

Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_M=\dfrac{2x_M^2+(1-m)x_M+1+m}{-x_M+m}, \forall m\neq -2$

$$\Leftrightarrow -x_My_M+my_M=2x_M^2+x_M-mx_M+1+m,\ \forall m\neq -2$$

$$\Leftrightarrow (x_M+y_M-1)m-x_My_M-2x_M^2-x_M-1=0,\ \forall m\neq -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M+y_M-1=0 \\ -x_My_M-2x_M^2-x_M-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M=1-x_M \\ -x_M(1-x_M)-2x_M^2-x_M-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-1 \\ y_M=2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2)$$

Vậy $x_M+y_M=1$.

Câu 11. **Chọn A.**

Gọi $A(x_0;y_0)$, $x_0<0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=-x_0^3+mx_0^2-x_0-4m, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0^2-4)m-x_0^3-x_0-y_0=0,\ \forall m\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4=0 \\ -x_0^3-x_0-y_0=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=10 \end{cases}\Rightarrow A(-2;10).$$

Lại có $y' = -3x^2 + 2mx - 1 \Rightarrow y'(-2) = -4m - 13$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $A(-2;10)$ có dạng $y = (-4m - 13)(x+2) + 10$ hay $y = (-4m - 13)x - 8m - 16\ (\Delta)$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $d: y = x$.

Vì Δ vuông góc với d nên ta có $-4m - 13 = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 12. Chọn A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}, y_0 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \\ \dfrac{2}{x_0 + 2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0 + 2 \in \{-2; -1; 1; 2\} \Rightarrow x_0 \in \{-4; -3; -1; 0\}$$

Vậy trên đồ thị (C) có bốn điểm có tọa độ nguyên.

Câu 13. Chọn A.

Gọi $A(a; a^3 - 5a^2 + 6a + 3), B(b; b^3 - 5b^2 + 6b + 3)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ, ta có $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^3 + b^3 - 5(a^2 + b^2) + 6(a + b) + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow -10a^2 + 6 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Câu 14. Chọn D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{N}^*, y_0 \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{3}{2x_0 - 1} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow 2x_0 - 1 \in \{1; 3\} \Rightarrow x_0 \in \{1; 2\}$$

$\Rightarrow M_1(-1; -1), M_2(0; -3), M_3(1;3)$ và $M_4(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên dương.

Câu 15. Chọn C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{4}{3x_0 - 2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0 - 2 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}; 1; \frac{4}{3}; 2\right\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0; -2), M_2(1; 4)$ và $M_3(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 16. Chọn D.

Ta có $y' = x^3 - 2x, y'' = 3x^2 - 2 \Rightarrow x_1 x_2 = \dfrac{-2}{3}$. Vậy $x_1.x_2 = \dfrac{-2}{3}$.

Câu 17. Chọn D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{6}{4x_0 - 1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 4x_0 - 1 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{7}{4}\right\}.$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0; -6)$ và $M_2(1; 2)$.

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 18. **Chọn D.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 1 + \dfrac{9}{x_0+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0 + 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\} \Rightarrow x_0 \in \{-10; -4; -2; 0; 2; 8\}$

$\Rightarrow M_1(-10; 0), M_2(-4; -2), M_3(-2; -8), M_4(0; 10), M_5(2; 4)$ và $M_6(8; 2)$.

Vậy trên đồ thị (C) có sáu điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 19. **Chọn A.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{5}{2x_0 - 1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 2x_0 - 1 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow x_0 \in \{-2; 0; 1; 3\}$

$x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(-2; 0)$ $\quad$ $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow M(1; 3)$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(0; -2)$ $\quad$ $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(3; 1)$

Vậy trên đồ thị (C) có bốn điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 20. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = \dfrac{1}{3}\left(5 - \dfrac{11}{3x_0 + 1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0 + 1 \in \{-11; -1; 1; 11\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-4; -\dfrac{2}{3}; 0; \dfrac{10}{3}\right\}$

$x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M(-4; 2)$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(0; -2)$

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 21. **Chọn D.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 2 + \dfrac{7}{4x_0 + 2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 4x_0 + 2 \in \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\dfrac{9}{4}; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4}; \dfrac{5}{4}\right\}$

Do $x_0 \in \mathbb{Z}$ nên trên đồ thị (C) không có điểm nào có tọa độ nguyên.

Câu 22. Chọn A

Gọi $M\left(a; \dfrac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$; $a > 0$ và $a \neq 2$, ta có $d = |a-2| + \left|\dfrac{a+2}{a-2} - 1\right| = |a-2| + \dfrac{4}{|a-2|} \geq 4$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $|a-2|^2 = 4 \Leftrightarrow |a-2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right.$.

Kết luận $M(4;3)$.

Câu 23. **Chọn B.**

Gọi $M(x;y)$ là điểm trên đồ thị (C), gọi N là điểm đối xứng với M qua I, ta có $N(4-x;36-y)$. Vì N thuộc (C), ta có

$$\begin{cases}36-y=(4-x)^3+3(4-x)^2-2\\ y=x^3+3x^2-2\end{cases}\Rightarrow x^3+3x^2-2=-(4-x)^3-3(4-x)^2+38\Leftrightarrow x=2$$

Vậy có tất cả một cặp điểm thuộc đồ thị (C) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 24. **Chọn A.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{Z}, y_0\in\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0\in\mathbb{Z}\\ y_0=3+\dfrac{8}{x_0-1}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow x_0-1\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}\Rightarrow x_0\in\{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$$

$\Rightarrow M_1(-7;2), M_2(-3;1), M_3(-1;-1), M_4(0;-5), M_5(2;11), M_6(3;7), M_7(5;5)$ và $M_8(9;4)$. Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 25. **Chọn A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)\in(C)$ với $a>0, a\neq 1$; tọa độ giao điểm các tiệm cận là $I(1;1)$, ta có

$$MI^2=(a-1)^2+\left(\frac{a+2}{a-1}-1\right)^2=(a-1)^2+\frac{9}{(a-1)^2}\geq 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a-1)^4=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{3}+1\\ a=-\sqrt{3}+1\end{array}\right.$. Vì M có hoành độ dương nên chọn $a=\sqrt{3}+1$, suyra $M(\sqrt{3}+1;\sqrt{3}+1)$ nên $x_M-y_M=0$.

Câu 26. **Chọn A.**

Gọi $A(x_A;x_A^3+3x_A-2), B(x_B;x_B^3+3x_B-2)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $I(2;18)$.

Ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=2x_I\\ y_A+y_B=2y_I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=4 & (1)\\ x_A^3+3x_A-2+x_B^3+3x_B-2=36 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $x_A^3+3x_A-2+(4-x_A)^3+3(4-x_A)-2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=1\Rightarrow x_B=3\\ x_A=3\Rightarrow x_B=1\end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(3;34)$.

Câu 27. **Chọn C.**

Gọi $A(x_A;x_A^3-4x_A^2+9x_A+4), B(x_B;x_B^3-4x_B^2+9x_B+4)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Ta có $\begin{cases}x_A+x_B=2x_O\\ y_A+y_B=2y_O\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=0 & (1)\\ x_A^3-4x_A^2+9x_A+4+x_B^3-4x_B^2+9x_B+4=0 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$$x_A^3-4x_A^2+9x_A+4+(-x_A)^3-4(-x_A)^2+9(-x_A)+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=-1\Rightarrow x_B=1\\ x_A=1\Rightarrow x_A=-1\end{array}\right..$$

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;10)$, $B(-1;-10)$.

Câu 28. **Chọn D.**

Gọi $A\left(a;a^3+a\right)$, $B\left(b;b^3+b\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=-\frac{1}{2}x$ hay $d: x+2y=0$.

Ta có: $\begin{cases} I\in d & (1)\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0 & (2)\end{cases}$ (với I là trung điểm của AB và $\overrightarrow{u_d}(2;-1)$ là vecto chỉ phương của d)

Từ (1) ta có $\frac{a^3+a+b^3+b}{2}=-\frac{1}{2}.\frac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow(a+b)(2a^2-2ab+2b^2+3)=0\Leftrightarrow a=-b$ (3)

(vì $2a^2-2ab+2b^2+3=2\left(a^2-ab+b^2+\frac{3}{2}\right)=2\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{2}b^2+3>0,\forall a,b$)

Với $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;(b-a)(a^2+ab+b^2+2)\right)$, từ (2) ta có

$$2(b-a)-(b-a)(a^2+ab+b^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(b-a)(a^2+ab+b^2-1)=0$$

$$\Rightarrow a^2+ab+b^2-1=0 \text{ (4) (Vì } a\neq b\text{)}$$

Thay (3) vào (4) ta được $a^2-a^2+a^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow b=-1\\ a=-1\Rightarrow b=1\end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(-1;-2)$.

Câu 29. **Chọn C.**

Đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận ngang là $y=1$

Gọi $M\left(a;\frac{a+1}{a-2}\right)\in(C)$, $a\neq2$. Ta có $\left|\frac{a+1}{a-2}-1\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{3}{a-2}\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=-1\end{array}\right.$.

Vậy $M(5;2)$, $M(-1;0)$.

Câu 30. **Chọn D.**

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0\neq0$ sao cho $y(x_0)=-y(-x_0)$ $\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq0$ sao cho $x_0^3-3x_0^2+m=-\left[(-x_0)^3-3(-x_0)^2+m\right]\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq0$ sao cho $3x_0^2=m\Leftrightarrow m>0$.

Câu 31. **Chọn D.**

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-1;1)$, gọi $M\left(a;\frac{a-3}{a+1}\right)\in(C)$ với $a\neq-1$ ta có

$$MI^2=(a+1)^2+\left(\frac{a-3}{a+1}-1\right)^2=(a+1)^2+\frac{16}{(a+1)^2}\geq8\Rightarrow MI\geq2\sqrt{2}.$$

Câu 32. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Tiệm cận $x=1, y=1 \Rightarrow I(1,1)$. Gọi $M\left(m, \frac{m+1}{m-1}\right) \in (C)$, ta tìm được tọa độ $A\left(1, \frac{m+3}{m-1}\right)$, $B(2m-1,1)$.

Diện tích $S=\frac{1}{2} IA.IB=\frac{1}{2}\left|\frac{m+3}{m-1}-1\right|.|2m-1-1|=4$.

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $(C): y=\frac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm tùy ý thuộc (C). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Gọi I là giao điểm hai tiệm cận. Khi đó diện tích tam giác ABI luôn là hằng số. Cách tính nhanh:

1. Chọn $M(2,3)$ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại M là $d: y=-2x+7$. Khi đó $A(1,5), B(3,1)$ và $IA=4, IB=2$.
2. Tam giác ABI là tam giác vuông tại I. Diện tích $S_{ABI}=\frac{1}{2} IA.\,IB=4$.

Câu 33. **Chọn D.**

Theo giả thiết ta có :

$$|y|=3|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-7}{x+1}=3x \\ \frac{x-7}{x+1}=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2x+7=0 \\ 3x^2+4x-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vô n}^0 \\ x=1 \vee x=-\frac{7}{3} \end{array}\right..$$

Nhắc lại: Điểm $M \in (C): y=f(x)$ sao cho khoảng cách từ M tới Ox bằng k lần khoảng cách từ M tới Oy có hoành độ là nghiệm phương trình $|f(x)|=k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=kx \\ f(x)=-kx \end{array}\right.$.

Cách khác:

Gọi $M\left(a; \frac{a-7}{a+1}\right)$ với $a \neq -1$. Theo đề ta có: $\left|\frac{a-7}{a+1}\right|=3|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\frac{7}{3} \end{array}\right.$.

Câu 34. **Chọn C.**

Gọi $M\left(a; \frac{2a-3}{a-2}\right) \in (C)$ với $a \neq 2$, ta có

$$d=|a-2|+\left|\frac{2a-3}{a-2}-2\right|=|a-2|+\frac{1}{|a-2|} \geq 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của d bằng 2.

Câu 35. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Gọi $A\left(x_A; -\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}\right)$, $B\left(x_B; -\frac{1}{3}x_B^3+x_B^2+3x_B-\frac{11}{3}\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua trục tung.

Ta có $\begin{cases} x_A+x_B=0 \\ y_A=y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-x_A \\ -\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}=-\frac{1}{3}x_B^3+x_B^2+3x_B-\frac{11}{3} \end{cases}$ (1)

$$\lfloor \;_A \qquad _B \qquad\qquad \lfloor -\,_3\, x_A + x_A + 3x_A - \,_3 = -\,_3\, x_B + x_B + 3x_B - \,_3 \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$-\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}=-\frac{1}{3}(-x_A)^3+(-x_A)^2+3(-x_A)-\frac{11}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=-3\Rightarrow x_B=3\\ x_A=3\Rightarrow x_A=-3\end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $A\left(3;\frac{16}{3}\right)$, $B\left(-3;\frac{16}{3}\right)$

Phương pháp trắc nghiệm

Kiểm tra điều kiện đối xứng qua trục tung $\begin{cases}x_A+x_B=0\\ y_A=y_B\end{cases}$ và kiểm tra điểm có thuộc đồ thị không.

Câu 36. **Chọn C.**

Gọi $M(x_M, y_M)$, $(x_M\neq -3)$ thỏa yêu cầu bài toán. Ta có:

$$\begin{cases}y_M=x_M+2+\dfrac{9}{x_M+3}\\ y_M=\pm x_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-\dfrac{15}{2}\\ y_M=-\dfrac{15}{2}\end{cases}.$$

Câu 37. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{Z}, y_0\in\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{2}{x_0^2+2x_0+2}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow x_0^2+2x_0+2\in\{-2;-1;1;2\}$$

$x_0^2+2x_0+2=-2$ (vô nghiệm) $\qquad x_0^2+2x_0+2=1\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=2\Rightarrow M(-1;2)$

$x_0^2+2x_0+2=-1$ (vô nghiệm) $\qquad x_0^2+2x_0+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(0;1)\\ x_0=-2\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(-2;1)\end{array}\right.$

Vậy có trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 38. **Chọn B.**

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^3-3(m-1)x_0^2-3mx_0+2,\ \forall m$

$$\Leftrightarrow 3(x_0^2+x_0)m+y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0,\ \forall m\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+x_0=0\\ y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=4\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x_0=0\\ y_0=2\end{cases}.$$

Suy ra $P(-1;4), Q(0;2)$ hoặc $P(0;2), Q(-1;4)$ nên $y_P+y_Q=6$.

Câu 39. **Chọn C.**

Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C)$ với $x_0\neq -1$. Tiếp tuyến tại M có phương trình

$$y-\frac{2x_0-1}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$$

hay $3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0$.

Khoảng cách từ $I\,(-1;2)$ tới tiếp tuyến

$$d=\frac{\left|-3-2(x_0+1)^2+2x_0^2-2x_0-1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\leq\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất là $\sqrt{6}$ khi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow (x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy : $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 40. **Chọn D.**

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0\neq 2$ và $x_0\neq 0$ sao cho $y(x_0)=-y(-x_0)$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 2$ và $x_0\neq 0$ sao cho $\dfrac{x_0^2-4mx_0+5m}{x_0-2}=-\dfrac{(-x_0)^2-4m(-x_0)+5m}{(-x_0)-2}$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 2$ và $x_0\neq 0$ sao cho $(1-2m)x_0^2+5m=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5m(1-2m)<0\\(1-2m).4+5m\neq 0\\(1-2m).0+5m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<0\\m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\m\neq\dfrac{4}{3}\end{cases}.$$

Câu 41. **Chọn D.**

Lấy điểm $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right)\in(C)$ với $m\neq 2$. Ta có $y'(m)=-\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d: y=-\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\dfrac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B\,(2m-2;\,2)$.

Ta có $AB^2=4\left[(m-2)^2+\dfrac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$, suy ra $AB\geq 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(m-2)^2=1$, nghĩa là $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 42. **Chọn C.**

Phương trình đường trung trực đoạn AB là $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Hai điểm trên đồ thị thỏa yêu cầu bài toán là $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Câu 43. **Chọn C.**

Gọi $M(x;y)$ thuộc (C), ta có

$$\overrightarrow{IM}=(x-1;y-4)\Rightarrow IM^2=(x-1)^2+\left(x+3+\frac{1}{x-1}-4\right)^2=\underbrace{(x-1)^2+\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)^2}_{g(x)}.$$

Mà

$$g(x)=(x-1)^2+(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2=2(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2\geq 2+2\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow \min IM=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. Đạt được khi $2(x-1)^2=\frac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow (x-1)^4=\frac{1}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$.

Câu 44. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Gọi $M\left(x_M,2-\frac{1}{x_M+1}\right)$ thuộc (C). Và MH, MK là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Khi đó $MH=|x_M+1|$ và $MK=\frac{1}{|x_M+1|}$. Do đó

$$MH+MK=|x_M+1|+\frac{1}{|x_M+1|}\geq 2\ (Cauchy)$$

Suy ra $MH+MK$ bé nhất khi $(x_M+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_M=-2\Rightarrow y_M=3 \\ x_M=0\Rightarrow y_M=1 \end{array}\right.$

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $(C): y=\frac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số, khi đó tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận có độ dài nhỏ nhất là $2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Câu 45. **Chọn A.**

Gọi A là điểm thuộc thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, nghĩa là $x_A<3\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt $x_A=3-\alpha$, suy ra $y_A=1+\frac{6}{x_A-3}=1+\frac{6}{3-\alpha-3}=1-\frac{6}{\alpha}$ (1).

Tương tự gọi B là điểm thuộc nhánh phải, nghĩa là $x_B>3\Rightarrow$ với số $\beta>0$, đặt $x_B=3+\beta$, suy ra $y_B=1+\frac{6}{x_B-3}=1+\frac{6}{3+\beta-3}=1+\frac{6}{\beta}$ (2).

Vậy $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=\left[(3+\beta)-(3-\alpha)\right]^2+\left[\left(1+\frac{6}{\beta}\right)-\left(1-\frac{6}{\alpha}\right)\right]^2$

$$g(\alpha;\beta)=(\alpha+\beta)^2+\left(\frac{6}{\alpha}+\frac{6}{\beta}\right)^2=(\alpha+\beta)^2+(6)^2(\alpha+\beta)^2\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$
$$=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+\frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

Dùng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$g(\alpha;\beta)\ge(2\alpha\beta+2\alpha\beta)\left(1+\frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right)=4\alpha\beta+\frac{144}{\alpha\beta}\ge 2\sqrt{4.144}=48.$$

Vậy $AB\ge\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\alpha=\beta\\ 4\alpha\beta=\dfrac{144}{\alpha\beta}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ (\alpha\beta)^2=36\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{1}{6}$$

Vậy độ dài AB ngắn nhất là $4\sqrt{3}$.

Câu 46. **Chọn D.**

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^4+mx_0^2-m+2016,\ \forall m\Leftrightarrow(x_0^2-1)m+x_0^4-y_0+2016=0,\ \forall m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2-1=0\\ x_0^4-y_0+2016=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=2017\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=2017\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M(1;2017)\\ N(-1;2017)\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}M(-1;2017)\\ N(1;2017)\end{cases}.$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $I(0;2017)$.

Câu 47. **Chọn B.**

Điểm M nằm trên trục Ox : $M(-2;0)\Rightarrow d_M=|-2|+0=2$

Điểm M nằm trên trục tung : $d_M=0+\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}<2$

Xét những điểm M có hoành độ $|x|>\frac{2}{3}\Rightarrow d_M=|x|+|y|>\frac{2}{3}$.

Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn $|x|<\frac{2}{3};y<-\frac{2}{3}\Rightarrow|y|>\frac{2}{3}$ (*)

- Trường hợp : $0\le x\le\frac{2}{3}$. Do (*) cho nên : $d_M=|x|+|y|>\frac{2}{3}$
- Trường hợp : $-\frac{2}{3}<x<0;-\frac{2}{3}<y<0\Rightarrow d_M=-x-1-\frac{5}{x-3};d'_M=-1+\frac{5}{(x-3)^2}$

$d'_M=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{5}\\ x=3+\sqrt{5}\end{array}\right.$. Khi lập bảng biến thiên,ta thấy hàm số nghịch biến với mọi $x\in\left(-\frac{2}{3};0\right)$. Vậy $\min d_M=d_M(0)=\frac{2}{3}$.

Câu 48. **Chọn D.**

Điểm $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d=\frac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\frac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \frac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\frac{3}{2}$:

- Với $0 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow y > \frac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \frac{3}{2}$
- Với $-\frac{3}{2} < x < 0; y > 0 \Rightarrow d = -x + x + 1 + \frac{1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}; d' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d = y(0) = \frac{3}{2}$.

Câu 49. **Chọn B.**

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - 3$ suy ra $\Delta: y = -2x + m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \underbrace{2x^2 - (m+3)x + 2m + 4}_{h(x)} = 0 \end{cases}.$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 23 > 0 \\ -6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 5 - 4\sqrt{3} \\ m > 5 + 4\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = 2x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{m+3}{4} \\ y_I = \frac{m+3}{2} + m \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4}; \frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x - 2y - 6 = 0$ khi $I \in d \Leftrightarrow \frac{m+3}{4} - 2.\frac{3m+3}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m = -3$ phương trình $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1; -5)$ và $(-1; -1)$.

Câu 50. **Chọn A.**

Gọi (x, y) là điểm cố định của họ đồ thị $(C_m): y = x^4 + mx^2 - m - 1$, ta có

$$y = x^4 + mx^2 - m - 1, \forall m$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)m + x^4 - 1 - y = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^4 - 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy họ đồ thị có hai điểm cố định là $(-1; 0), (1; 0)$.

Câu 51. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{N} \\ y_0 = \frac{1}{2}\left(x_0 - 6 + \frac{8}{x_0+1}\right) \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x_0 + 1 \in \{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\} \Rightarrow x_0 \in \{-9;-5;-3;-2;0;1;3;7\}$

Do $x_0 \in \mathbb{N}$ nên

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(0;1)$ $\quad$ $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$ (loại)

$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$ (loại) $\quad$ $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(7;1)$.

Câu 52. Chọn A.

Gọi $A(x_0;y_0)$, $x_0 > 0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0 = -x_0^4 + 2mx_0^2 - 2m + 1,\ \forall m$

$\Leftrightarrow 2m(x_0^2-1) + 1 - x_0^4 - y_0 = 0,\ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ 1 - x_0^4 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1\ (x_0 > 0) \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;\,0)$

Lại có $y' = -4x^3 + 4mx \Rightarrow y'(1) = 4m - 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm $A(1;0)$ có dạng $y = (4m-4)(x-1)$ hay $y = (4m-4)x + 4 - 4m$ (Δ).

Vì Δ song song với d nên $\begin{cases} 4m - 4 = 16 \\ 4 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m = 5.$

Câu 53. Chọn D.

Gọi $M\left(x, x+2+\frac{1}{x+2}\right) \in (C)$.

Khoảng cách từ M đến d là $h(M;d)$ cho bởi

$$h(M;d) = \frac{|3x+y+6|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left|3x+6+x+2+\frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x+2)+\frac{1}{x+2}\right|.$$

- Khi $x+2>0$:

Ta có $4(x+2) + \frac{1}{x+2} \geq 4$ dấu bằng xảy ra khi $4(x+2) = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy $h(M;d)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{4}{\sqrt{10}}$

- Khi $x+2<0$

  Ta có $-4(x+2) - \frac{1}{(x+2)} \geq 4$

  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow -4(x+2) = -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$.

Vậy $h(M;d)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{4}{\sqrt{10}}$

Câu 54. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$ ta có $d=|a-1|+\left|\dfrac{a+1}{a-1}-1\right|=|a-1|+\dfrac{2}{|a-1|}\geq 2\sqrt{2}$.

Câu 55. **Chọn B.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$ ta có $|a-2|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|\Leftrightarrow|a-2|=\dfrac{4}{|a-2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=4\end{array}\right.$. Vậy $M(0;-1),M(4;3)$.

Câu 56. **Chọn A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+3}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$ ta có $|a|=\left|\dfrac{a+3}{a-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-3=0\\a^2+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$. Vậy $M(-1;-1),M(3;3)$.

Câu 57. **Chọn C.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$ ta có

$$\frac{a-\frac{a+2}{a-1}+1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2-a-3}{a-1}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-2=0\\a^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1+\sqrt{3}\\a=1-\sqrt{3}\\a=2\\a=-2\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu là $M(2;4)$; $M(-2;0)$.

Câu 58. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ đồ thị (C_m), ta có

$$y_0=(m+2)x_0^3-3(m-2)x_0+m+7,\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow(x_0^3-3x_0+1)m+2x_0^3+6x_0+7-y_0=0,\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^3-3x_0+1=0\\2x_0^3+6x_0+7-y_0=0\end{cases}$$

Vì hệ có 3 nghiệm phân biệt nên họ đồ thị có 3 điểm cố định.

Câu 59. **Chọn B.**

Gọi $M(x,y),N(-x,y)$ là hai điểm thuộc đồ thị (C_m) đối xứng nhau qua trục tung. Ta có

$$x^3-(3m-1)x^2+2mx+m+1=-x^3-(3m-1)x^2-2mx+m+1$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+4mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-2m\end{array}\right..$$

Vậy $m<0$.

Câu 60. **Chọn B.**

Ta có $y'=6x^2+2mx-12$. Điều kiện $\begin{cases}\Delta'>0\\S=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+72>0\\m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$. Vậy $m=0$.

Câu 61. **Chọn C.**

Gọi $M\left(a,\dfrac{a+1}{a+2}\right)\in(C)$ với $a\neq -2$, ta có $|a|=\left|\dfrac{a+1}{a+2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+a-1=0\\ a^2+3a+1=0\end{array}\right.$

Phương trình có 4 nghiệm nên trên đồ thị có 4 điểm cách đều hai trục tọa độ.

Câu 62. **Chọn B.**

Gọi $M\left(a,\dfrac{3a-5}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$ ta có $|a-2|=\left|\dfrac{3a-5}{a-2}-3\right| \Leftrightarrow (a-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=3\end{array}\right.$.

Vậy $M(1;1)$; $N(3;4)$.

Câu 63. **Chọn C.**

Gọi $A\left(a,-a^3+3a+2\right),B\left(b,-b^3+3b+2\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $M(-1;3)$, ta có: $\left\{\begin{array}{l} a+b=-2\\ -a^3+3a+2-b^3+3b+2=6\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=-2\\ (a+b)^3-3ab(a+b)-3(a+b)+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=-2\\ ab=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=-2\end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} a=-2\\ b=0\end{array}\right.$

Câu 64. **Chọn D.**

Ta có $y=\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{-x+1+2}{x-1}=-1+\dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2\\ x-1=-2\\ x-1=1\\ x-1=-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=-1\\ x=2\\ x=0\end{array}\right.$.

Vậy có 4 điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 65. **Chọn D.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$. Ta có $d=|a-2|+\left|\dfrac{a+1}{a-2}-1\right|=|a-2|+\dfrac{3}{|a-2|}\geq 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a-2)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2+\sqrt{3}\\ a=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$. Vậy hai điểm đó là

$\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$

Câu 66. **Chọn D.**

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận. Vậy điểm cần tìm là $M(-1;3)$.

Câu 67. **Chọn B.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Ta có $|a-1|=\dfrac{2a+1}{a-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-2a+1=2a+1\\ a^2-2a+1=-2a-1\end{array}\right. \Leftrightarrow a^2-4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\\ a=4\end{array}\right.$

Vậy điểm cần tìm là: $M(0;-1)$, $M(4;3)$.

Câu 68. **Chọn A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{\quad}\right)\in(C)$

$a-2)$ với $a \neq 2$.

Ta có $5\left|a-2\right|=\left|\frac{a+2}{a-2}-1\right| \Leftrightarrow 5\left|a-2\right|=\frac{4}{\left|a-2\right|} \Leftrightarrow 5\left(a^2-4a+4\right)=4$.

$$\Leftrightarrow 5a^2-20a+16=0 \Leftrightarrow a=\frac{10\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy có hai điểm cần tìm.